



Facultad de Educación

**MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN
SECUNDARIA**

**Secuencias Didácticas Basadas en GeoGebra para la Enseñanza de la
Geometría en la Educación Secundaria**

**Didactic Sequences Based on GeoGebra for the Teaching of Geometry in
Secondary Education**

Juan Campo Quinzanos

Especialidad de Matemáticas

Director: Steven Van Vaerenbergh

Curso 2020/2021

19/05/2021

Alumno:

VºBº Director:

RESUMEN

En este artículo se profundiza en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para la enseñanza de la geometría en la educación secundaria, y en particular el Software de Geometría Dinámica (SGD) GeoGebra. Este software permite al alumno construir modelos geométricos de forma interactiva y dinámica, mediante la manipulación libre de los objetos matemáticos, impulsándole a que descubra por sí solo conceptos y propiedades geométricas mediante el proceso de exploración de situaciones prácticas (Mora, 2017). Se examina cómo el SGD puede ser integrado en el currículo de secundaria para explicar ciertos contenidos del bloque de geometría del curso tercero y cuarto de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Los contenidos se han seleccionado por considerar que la utilización de este software para explicar los conceptos necesarios puede ser más beneficiosa que explicándolos por el método tradicional que se basa en representaciones estáticas. Se diseñan tres secuencias didácticas para trabajar con GeoGebra, un software popular de SGD. La primera está destinada a trabajar el concepto de mediatriz y bisectriz, y la segunda trata la simetría axial y la central (ambas para el curso de tercero). La tercera secuencia didáctica está planteada para abordar los vectores y la ecuación de la recta en cuarto de secundaria. Para todas las secuencias se muestra qué contenidos van a ser aprendidos y cuáles son los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables.

Palabras claves: GeoGebra; geometría dinámica; Educación Secundaria Obligatoria (ESO); secuencias didácticas.

ABSTRACT

This paper explores Information and Communication Technologies (ICT) for teaching geometry in secondary education, and in particular the Dynamic Geometry Software (DGS) GeoGebra. This software allows students to build geometric models in an interactive and dynamic way, through the free manipulation of mathematical objects, encouraging them to discover geometric concepts and properties on their own through the process of exploring practical situations (Mora, 2017). We examine how DGS can

be integrated into the secondary school curriculum to explain certain contents of the geometry block in the third and fourth year of Compulsory Secondary Education (CSE). The contents have been selected because it is considered that the use of this software to explain the necessary concepts can be more beneficial than explaining them by the traditional method based on static representations. Three didactic sequences are designed to work with GeoGebra, a popular DGS software. The first one is aimed at working on the concept of the perpendicular bisector and the bisector, and the second one deals with axial and central symmetry (both to third course). The third one is designed to teach vectors and line equation. For all sequences, an overview is provided of the contents to be learnt, the assessment criteria and the assessable learning standards.

Key words: GeoGebra; geometría dinámica; Educación Secundaria Obligatoria (ESO); didactic sequences.

Índice general

1. Introducción	5
2. Justificación del tema del trabajo	9
3. Marco teórico	11
3.1. La digitalización de la enseñanza	11
3.1.1. El uso de las TIC	12
3.1.2. Sistemas de Geometría Dinámica	13
3.1.3. Impacto de la COVID-19 en la educación	14
3.2. ¿Qué es GeoGebra?	16
3.2.1. Descripción de GeoGebra	16
3.2.2. Algunos premios de Geogebra	18
3.2.3. Fórum de GeoGebra, GeoGebraWiki y GeoGebra Classroom	19
3.2.4. Papel de GeoGebra en la enseñanza digitalizada	20
4. Secuencias didácticas con GeoGebra	25
4.1. Justificación de la elección de las secuencias	26
4.2. Tercero de E.S.O	28
4.2.1. Mediatriz y bisectriz	28
4.2.2. Traslaciones y simetría axial y central	31
4.3. Cuarto de E.S.O	38
4.3.1. Vectores y ecuación de la recta	38
5. Conclusiones	49
Referencias	51

Precisiones en torno al uso del lenguaje en este trabajo.

A lo largo de este trabajo, y con el fin de facilitar la lectura del texto, se hará uso del masculino genérico para referirse a las personas de ambos sexos, no significando en ningún momento esta adopción la utilización del uso sexista del lenguaje ni de las connotaciones que él implica.

Capítulo 1

Introducción

Desde que tengo uso de razón siempre he escuchado las famosas frases “las matemáticas no son para mí” u “odio las matemáticas”, y desde mi experiencia como profesor de prácticas he podido comprobar que esos pensamientos continúan implantados en la mente de muchos alumnos. Muchos de estos piensan así porque no encuentran motivación para estudiar las matemáticas, sino que las encuentran aburridas ya que la metodología tradicional puede resultar acabar siendo monótona. Por esta razón, se considera que es crucial investigar y probar nuevos métodos de enseñanza que permitan evolucionar la manera de enseñar las matemáticas para así poder animar a todo el alumnado en el estudio de esta ciencia. Es muy importante estar continuamente esforzándose en intentar provocar un cambio en la mentalidad de aquellos estudiantes que no tienen ganas de aprender matemáticas. Consideramos que estos nuevos métodos de enseñanza deben ir de la mano de las Tecnologías de la Información y Comunicación o TIC puesto que son herramientas con las que el alumnado convive día a día y con las que podrán desarrollar todas sus competencias en esta área.

En concreto, el estudio de este trabajo está basado en el empleo en las aulas de un software de geometría dinámico denominado GeoGebra, un software que permite abandonar la forma habitual en la que se enseña la geometría para pasar a una metodología en la que la geometría es enseñada de forma dinámica, permitiendo a los alumnos realizar cambios en los objetos representados para que así puedan des-

cubrir relaciones y propiedades de forma autónoma. Creemos que este software es el ideal para que los estudiantes desarrollen grandes actitudes y competencias matemáticas siempre y cuando se realicen las actividades tras la dirección del docente, quién dirigirá las clases con el objetivo de que los alumnos logren todo lo anterior.

En pleno siglo XXI es inevitable no hacer uso de aparatos electrónicos en nuestro día a día y es por esta razón por la que también deben ser introducidos en las aulas en beneficio de los alumnos. Y más aún hoy en día, tras la crisis provocada por la COVID-19, que ha marcado un antes y un después en el desarrollo de muchos sectores de trabajo y, por supuesto, también ha afectado a la enseñanza. El confinamiento vivido en el 2020 ha servido para apreciar aún más todos los recursos de aprendizaje on-line de los que se disponen, de tal forma que muchos de ellos han sido descubiertos una vez confinados y ya parece que van a formar parte del proceso educativo para siempre, lo que está estrechamente ligado al uso de las TIC.

Por lo tanto, es impensable que la tecnología no vaya de la mano con la educación y que los docentes no hagan uso de ellas en su práctica. En el caso de las matemáticas, es cierto que son cada vez más los docentes que se animan a profundizar e investigar cómo poder hacer uso de estas tecnologías para fomentar el aprendizaje de las matemáticas en sus alumnos, aunque todavía sigue habiendo dificultades para que se implanten en cualquier instituto pues no todos disponen de ordenadores o tabletas electrónicas para todos el alumnado. Pero lo que está claro es que tiene que haber un esfuerzo por parte de todos (y que implique inversión) para poder implantar las TIC en las aulas ya que potencian aspectos como la visualización de conceptos matemáticos y permiten experimentar con dichos conceptos, y no solo conformarnos con seguir utilizando los métodos de enseñanza del pasado.

Se ha llevado a cabo una revisión bibliográfica de varios artículos y trabajos que tratan acerca de la revolución de las TIC en el aula, centrándonos sobre todo en aquellos trabajos que analizaban la integración de GeoGebra para aprender matemáticas, hablando de los cambios del perfil del profesor, de las nuevas estrategias

para dirigir la clase y del papel activo de los estudiantes.

Tras esta introducción, se sigue con una justificación del tema de trabajo, donde explicaremos cómo podrán desarrollar los alumnos las competencias básicas establecidas en el Decreto 38/2015 de 22 de mayo, que establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria, para continuar posteriormente con el marco teórico, donde se abordará la digitalización de la enseñanza y qué impacto ha tenido la COVID-19 en la educación, y de GeoGebra y su papel en la enseñanza digitalizada.

Seguido al marco teórico se expone el desarrollo de tres secuencias didácticas que hemos diseñado para enseñar ciertos contenidos de GeoGebra a los alumnos. Dos de estas tres secuencias son para el curso tercero de la ESO, la primera está ideada para enseñar el concepto de mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo, y la segunda para tratar las traslaciones y las simetrías, axial y central. La tercera de las secuencias está preparada para estudiar los vectores y ecuación de la recta en cuarto de la ESO. Para cada una de estas secuencias, se especifican los contenidos, los criterios de evaluación, los estándares de aprendizaje evaluables, así como una justificación de por qué se considera adecuado llevar a cabo esta propuesta. Finalizaremos con un capítulo a modo de conclusión.

Capítulo 2

Justificación del tema del trabajo

El principal motivo por el cual se decide llevar a cabo este trabajo son las dificultades que encontramos nosotros, los docentes, a la hora de enseñar las matemáticas, es decir, lograr que el aprendizaje sea significativo y satisfactorio, y conseguir que los alumnos sientan ganas de aprenderlas.

La introducción en el proceso de enseñanza en el aula de un Software de Geometría Dinámica será un elemento disruptivo capaz de motivar a los estudiantes a aprender contenidos matemáticos de una manera divertida y diferente, que rompe con el método de enseñanza tradicional.

En este trabajo focalizaremos el análisis en el uso de GeoGebra, un Software de Geometría Dinámica que resulta especialmente adecuado para enseñar matemáticas teniendo como objetivo lo anterior. En concreto, desarrollaremos tres secuencias didácticas basadas en contenido de Geometría, dos para tercero de Educación Secundaria Obligatoria y una para cuarto, que más adelante se detallará cómo es su desarrollo y el porqué o justificación de la elección de dichos contenidos. Además, con este método novedoso de enseñanza, también nos comprometemos a que los alumnos tengan la oportunidad de desarrollar las competencias básicas establecidas en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato del currículo de Cantabria.

Las competencias básicas, junto a la explicación de cómo conseguimos que el alum-

nado las desarrollen, son:

- Comunicación lingüística: a la hora de leer los enunciados de las actividades y de aprender nuevo vocabulario relacionado con la tecnología al hacer uso de los aparatos electrónicos y del programa informático.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología: al tratarse de conceptos matemáticos está claro que desarrollamos la competencia matemática y, además, por realizarse la secuencia didáctica en apoyo de aparatos electrónicos y software de geometría dinámica, también conseguimos fomentar la competencia en ciencia y tecnología.
- Competencia digital: en cuanto al uso de la tecnología digital (tabletas u ordenadores) para aprender los conceptos matemáticos.
- Aprender a aprender: estas secuencias didácticas que detallaremos más tarde están pensadas y diseñadas para que sean los propios alumnos los que, a través de la manipulación de los objetos matemáticos gracias al software de geometría dinámico GeoGebra, deduzcan propiedades matemáticas por su cuenta, sin que sea el profesor quien se lo descubra sin darles tiempo a pensarlo primero ellos. Es en cierta medida un proceso de aprendizaje autónomo.
- Competencias sociales y cívicas: como en ocasiones el proceso de aprendizaje con estas secuencias didácticas puede llegar a ser un poco autónomo, en el sentido de que el profesor no es quien les descubre todos los resultados y propiedades matemáticas sino que se intenta que puedan llegar a ellos los propios estudiantes. Los alumnos tendrán la oportunidad de preguntar a sus compañeros las dudas que les surjan o podrán compartir sus ideas, fomentando de esta manera el compañerismo y el trabajo en equipo dentro del aula.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor: a la hora de ser ellos quienes tengan que esforzarse en deducir y descubrir los resultados y propiedades matemáticas y también al permitirles manipular los objetos a su antojo o realizar construcciones diferentes a las que les son proporcionadas.

Capítulo 3

Marco teórico

3.1. La digitalización de la enseñanza

La digitalización, entendida como el proceso de transformación de todo material educativo e informativo (textos, sonidos, videos, etc) a formato de lenguaje digital, es una tendencia en alza (Machekhina, 2017) que está provocando una reforma y modernización de la educación. Muchos expertos han realizado análisis que apuntan a que este proceso de digitalización supone el punto de inflexión en la historia del proceso de enseñanza (Machekhina, 2017).

Proyectos educativos como “Touch de future” (Machekhina, 2017), desarrollado en base al documento de Políticas de Educación Digital de la Unión Europea (cuyo fin es el aprovechamiento del aprendizaje mediante el uso de nuevas tecnologías para alcanzar los objetivos educativos), tratan de integrar al sistema educativo tecnologías digitales para que así ayuden a los estudiantes a aprender nuevos contenidos y también les impulsen a ser más competentes, desarrollar el pensamiento lógico y adquirir nuevas técnicas de comunicación. Las nuevas tecnologías integradas en la educación son beneficiosas para los docentes puesto que ofrecen métodos de enseñanza en los que se emplea o hace uso de videos, mapas mentales, estimulaciones, páginas web, música, etc. que provocarán que el proceso de enseñanza pueda llegar a ser más significativo y satisfactorio para el alumnado (Ghavifekr y Rosdy, 2015). Además, se reduce los trabajos en papel como consecuencia del proceso de sustitu-

ción de cuadernos y libros de texto por ordenadores y tabletas electrónicas. Pero esto no es solo beneficioso para el profesor. Los estudiantes se beneficiarán de la integración de la tecnología en la enseñanza ya que no estarán limitados por el currículo y los recursos al poder acceder a actividades que estén diseñadas para fomentar su estimulación y entendimiento de la materia en cuestión. Todo esto impulsará a que los profesores diseñen y preparen sus clases de una manera más efectiva, creativa e interesante para así conseguir una enseñanza activa (Ghavifekr y Rosdy, 2015).

3.1.1. El uso de las TIC

Las TIC (tecnologías de la información y comunicación) pueden definirse como las tecnologías empleadas para almacenar, recuperar, procesar y comunicar información (Belloch, 2012). Esta forma de procesamiento de información combina las tecnologías de la comunicación (radio, televisión y teléfono) con las tecnologías de la información (tecnologías de registro de comunicaciones). Es esta combinación junto al desarrollo de las redes (internet) la que permite a las personas comunicarse entre ellas sin importar la distancia que las separe.

La transformación que han sufrido las TIC ha hecho que sean capaces de mejorar la calidad educativa de un alumno al cambiar la forma en la que se obtiene, maneja e interpreta la información (Hernandez, 2017). Los estudiantes siempre se han apoyado en el uso de tecnologías para facilitar su aprendizaje como por ejemplo con la aparición de la calculadora o la grabadora, llegando a convertirse los recursos tecnológicos en recursos educativos.

El continuo desarrollo de las TIC ha supuesto un nuevo clima de aprendizaje donde los estudiantes pasan a ser los protagonistas de su propio proceso de aprendizaje donde tanto el tiempo como la flexibilidad juegan un importante papel en una educación que se irá virtualizando cada vez más, obligándonos a plantear nuevos paradigmas educativos y pedagógicos (Hernandez, 2017). La educación y la tecnología reclaman ir de la mano y por eso deben considerarse competencias esenciales en el

proceso educativo del alumnado. Es crucial que los docentes estén bien preparados para adaptar y crear nuevas actividades y proyectos que incorporen el uso de las TIC en el aula para así saciar las ganas de los estudiantes de aprender más sobre tecnologías. En definitiva, las clases presenciales en el aula necesitan nuevos espacios que complementen el conocimiento mediante el uso de las TIC, imponiéndose nuevos roles en el proceso formativo que supondrán nuevos retos para el profesorado y los centros educativos, pasando a ser los estudiantes los elementos principales para la comunicación e interacción social como consecuencia de haber nacido en una sociedad tecnificada.

3.1.2. Sistemas de Geometría Dinámica

En la enseñanza de las matemáticas en la etapa de la educación primaria y secundaria, si hay algún tipo de tecnología que se emplee para la motivación y fomento del buen aprendizaje de la materia, esta es los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) (González-López, 2001). Los sistemas de geometría dinámica, como Geometer's Sketchpad, TheGeometry Inventor o GeoGebra, son programas informáticos que permiten la creación y manipulación de construcciones geométricas. Este tipo de programas son capaces de construir modelos geométricos a partir de puntos, rectas, curvas,... así como de las dependencias y relaciones de unos objetos con otros. Como resultado, se consigue que la geometría no se conciba como un tema codificado de conocimientos a transmitir y que sea una actividad de los estudiantes con determinados objetos de su entorno.

Los SGD suponen más que un medio de interacción entre el alumno y los objetos matemáticos representados. Modifican la forma en que se ejerce la actividad matemática respecto de la forma tradicional en que la geometría se enseña (que no es más que con un lápiz, regla y papel). Los alumnos pueden hacer uso del ordenador como herramienta para resolver problemas de geometría mediante dibujos, desarrollar proyectos de investigación o seguir lecciones diseñadas previamente (Mora, 2017). Actualmente, encontramos numerosos ejercicios, actividades y ejemplos en internet

sobre la utilización de los programas de geometría dinámica en el aula. Además, los SGD impulsan al alumno a descubrir por sí solo conceptos y propiedades geométricas mediante el proceso de exploración de situaciones prácticas (Mora, 2017).

Otro de los beneficios del uso de los sistemas de geometría dinámica en el aula es la posibilidad que se presenta de que sean los propios estudiantes los que se corrijan a sí mismos, es decir, que sean algo más autónomos en su proceso de aprendizaje (González-López, 2001). En muchas ocasiones, el alumno cree que su única tarea es la de realizar y resolver el problema o ejercicio y que la labor de valorar si se ha realizado correctamente o no es la del profesor o profesora. A diferencia de lo que ocurre con un contexto tradicional de lápiz y papel, con el uso de los programas SGD, el alumno tiene a su alcance una herramienta que le permite valorar por sí mismo si su tarea realizada está correctamente desarrollada. Se consigue así que el alumno asuma más responsabilidad y que comprenda el alcance de sus decisiones tomadas al realizar la actividad.

3.1.3. Impacto de la COVID-19 en la educación

La crisis producida por la COVID-19 ha marcado un antes y un después en el desarrollo de muchos sectores de trabajo. El porcentaje de empresas en España que hacen uso de las tecnologías para teletrabajar ha aumentado muy significativamente a raíz de haber sufrido esta crisis (un tercio de los ocupados cambiaron su modelo laboral por la Covid-19) (Meraviglia, 2020). Según Kate Lister, presidenta de Global Workplace Analytics (GWA), se estima que para finales de 2021 el 25 % o 30 % de la fuerza laboral trabajarán varios días de la semana desde casa. Pero no solo han sido las empresas las que han tenido que renovarse en este aspecto, sino que nos ha obligado a replantearnos el modelo de educación vigente donde hasta ahora casi siempre, por no decir siempre, se ha llevado a cabo un modelo de enseñanza presencial.

Tras el gran número de contagios que se producían cada día en países de toda

parte del mundo, los dirigentes de muchos de esos países se vieron obligados a decretar el cierre de empresas y colegios evitando así realizar en el exterior todo tipo de actividades no presenciales. Así que, ante el cierre de colegios e institutos, los países tuvieron que hacer uso de múltiples herramientas para la enseñanza on-line para continuar con el programa de contenidos didácticos establecidos.

Por tanto, durante la pandemia, los recursos de aprendizaje on-line permitieron a los alumnos de todo el mundo seguir aprendiendo nuevos conocimientos desde sus casas. Además, las tecnologías digitales permiten a profesores y alumnos hacer uso de nuevos materiales y actividades que vayan mucho más allá que los libros de texto. La unión entre profesores y tecnologías digitales en la educación, permitirá, aparte de que los alumnos sigan aprendiendo, observar cómo estudian los alumnos, el tipo de actividades que encuentran más interesantes e identificar qué ejercicios y problemas les resultan más aburridos o difíciles. Sin embargo, es en muchos casos cuando, a raíz de la crisis provocada por la Covid-19, los docentes toman conciencia de la gran necesidad de estar más capacitados en el uso de las TIC para ejercer la docencia (Schleicher, 2020), llegándose a convertir en la segunda necesidad de capacitación más habitual detectada por el cuerpo de docentes justo por detrás de la enseñanza a alumnado con necesidades especiales.

De acuerdo al OECD del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) de 2018, la mayoría de los sistemas educativos no estaban preparados para aprovechar las oportunidades que brindaban las tecnologías para la educación (Schleicher, 2020). Otro de los datos obtenidos por la Encuesta Internacional de la OECD de Enseñanza y Aprendizaje (TALIS) a destacar de ese estudio es que, hasta 2018, solo el 53 % de profesores permitía en sus clases en uso de tecnologías de la información y comunicación (TIC) para la realización de proyectos.

Todo esto destaca la importancia de la tarea que tienen los profesores y profesoras por estar renovándose continuamente adaptándose así a las nuevas prácticas innovadoras y rápidas transformaciones en la educación que vayan surgiendo a lo

largo del tiempo. Es indiscutible que en pleno siglo 21 los profesores se apoyen en las nuevas tecnologías para beneficio del proceso de aprendizaje de los alumnos, y más aún después de la crisis sufrida por la COVID-19.

3.2. ¿Qué es GeoGebra?

3.2.1. Descripción de GeoGebra

De entre todos los SGD, destacamos GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>). GeoGebra es un software interactivo de geometría diseñado por Markus Hohenwarter como proyecto para la tesis de su máster en la Universidad de Salzburgo, Austria. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo. GeoGebra es de libre uso y descarga, y su uso se está incrementando rápidamente por todo el mundo, especialmente en Norteamérica y Europa. En todo el mundo, millones de usuarios lo adoptan (ver el gráfico de la figura 3.1, donde se refleja el número de visitas a GeoGebra, en millones, en los últimos seis meses de este año 2020) y comparten sus diseños y aplicaciones de GeoGebra para que otros puedan aprovecharse de ellos. La gran ventaja de este software matemático es que consigue armonizar los conceptos matemáticos con los experimentos consiguiendo así una organización didáctica y disciplinar que cruza matemática, ciencias, ingeniería y tecnología (STEM: Science, Technology, Engineering and Mathematics) (*¿Qué es GeoGebra?*, s.f.). Es por tanto un recurso mundial innovador para la enseñanza de matemáticas en las escuelas de cualquier parte del mundo.

Con GeoGebra es posible construir polígonos, a través de puntos y segmentos, vectores, rectas, secciones cónicas y funciones, y posteriormente realizar cambios dinámicamente. Una de las características más destacada de GeoGebra es su vista: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa (como por ejemplo vemos en la imagen 3.2, donde la expresión algebraica de la circunferencia se identifica con la circunferencia que aparece representada en la ventana geométrica). Podemos, por tanto, realizar construccio-

nes geométricas en la ventana de geometría mediante el uso de las herramientas de construcción de objetos, o podemos directamente escribir la expresión algebraica del objeto deseado en la ventana de álgebra mediante el uso del teclado. Las herramientas para construir objetos matemáticos aparecen en varios menús con varios apartados, estando sus nombres identificados por sus funciones, como por ejemplo: nuevo punto, mover, circunferencia de centro y punto, recta por dos puntos, polígono tras marcar todos los puntos, etc. También encontramos botones que ofrecen distintas funciones como borrar un objeto, configuración del objeto, aumentar o disminuir el zoom de la ventana geométrica, etc. Además, GeoGebra posee más comandos que herramientas geométricas.

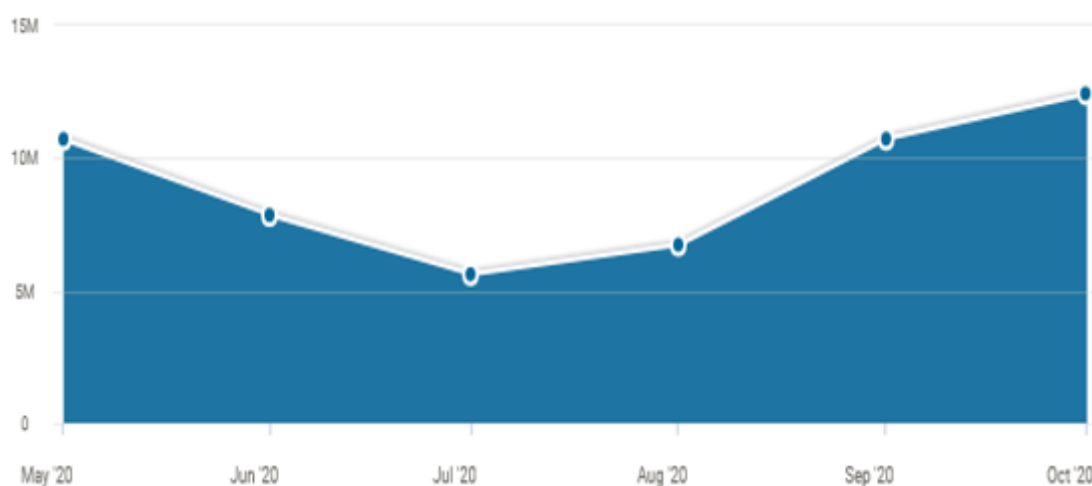


Figura 3.1: Número total de visitas a www.geogebra.org en los últimos 6 meses. Fuente: SimilarWeb.

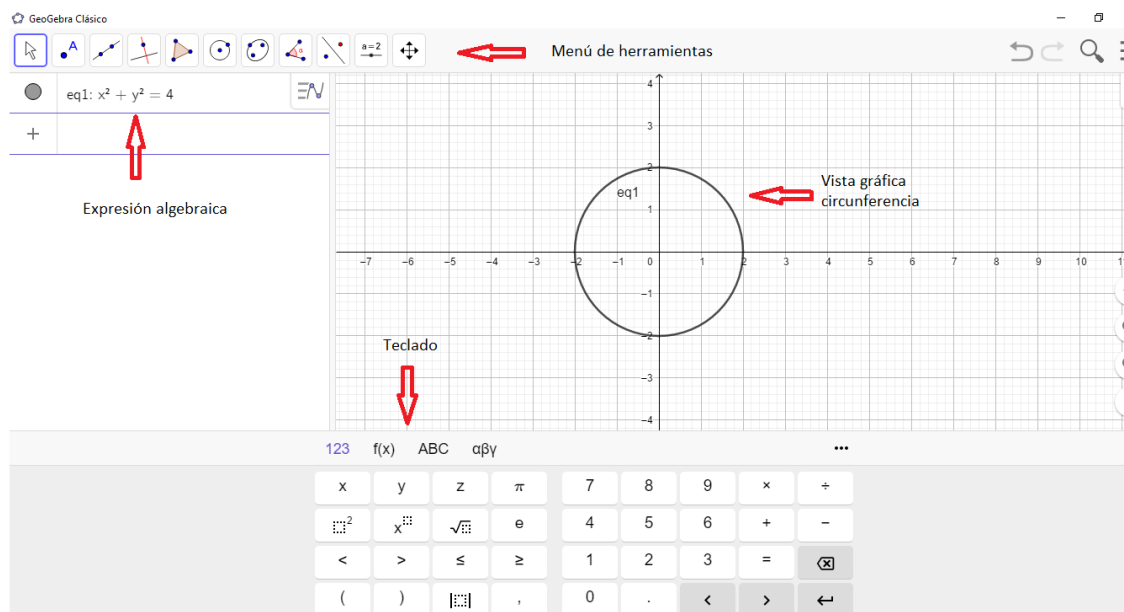


Figura 3.2: Vista gráfica de GeoGebra con ejemplo de circunferencia.

3.2.2. Algunos premios de Geogebra

Tras su publicación en internet en el año 2002, Hohenwarter recibió numerosos mensajes de profesores que mostraban su entusiasmo al poder usar GeoGebra en las aulas mientras enseñaban matemáticas a sus alumnos. Estos agradecimientos no solo se plasmaron en mensajes de profesores de matemáticas, sino que el software ganó diferentes premios, entre ellos el premio europeo de softwares académicos en 2002 (European Academic Software Award). Markus no se dio por satisfecho y siguió desarrollando el software GeoGebra, llegando a trabajar en un proyecto de enseñanza en la Universidad Atlántica de Florida (FAU) consistente en mejorar el contenido matemático de profesores y enseñarles nuevas prácticas matemáticas mediante el uso de nuevas tecnologías. La colaboración con institutos de la zona le permitió seguir desarrollando GeoGebra ya que recogía opiniones y experiencias de los profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria (Hohenwarter y Lavicza, 2007). Algunas otras distinciones que ha conseguido el software GeoGebra son el Tech Award en 2009, el NTLC Award en 2010 o el premio Archimedes en 2016.

Hoy en día, millones de usuarios pertenecientes a más de 200 países hacen uso

de GeoGebra y se estima que este software es una herramienta más de enseñanza para aprender matemáticas para muchos profesores de educación primaria y secundaria de todo el mundo.



Figura 3.3: Markus Hohenwarter.

3.2.3. Fórum de GeoGebra, GeoGebraWiki y GeoGebra Classroom

El gran incremento de usuarios de GeoGebra y la continua demanda de material y ayudas en el uso de las herramientas de GeoGebra, hizo que Markus se decidiera a desarrollar las dos páginas web siguientes: GeoGebraWiki (<https://wiki.geogebra.org/es/Manual>) y el Fórum de Usuarios de GeoGebra (<https://help.geogebra.org/>).

En cuanto a GeoGebraWiki, se trata de un sitio web donde todas las personas que trabajan con GeoGebra puedan compartir los materiales que hayan desarrollado y creado con GeoGebra y, de esta manera, cualquier otro usuario de GeoGebra pueda acceder a ese material de manera totalmente libre. Además, los usuarios pueden hacer nuevas contribuciones de plantillas de trabajo dinámicas (applets) que han realizado para así enriquecer aún más la actividad. Con plantillas de trabajo dinámicas nos referimos a dibujos o ejercicios realizados en GeoGebra que se pueden insertar en una página web y que además son interactivos, es decir, que los usuarios que visiten dicha página web pueden modificar aspectos del dibujo directamente desde internet (mover puntos, cambiar valores de un deslizador, agrandar o alejar la vista,

etc). GeoGebraWiki se trata por tanto de un espacio común con múltiples enlaces web que te llevan a actividades dinámicas de GeoGebra creadas por otros.

En el Fórum de Usuarios de GeoGebra cada usuario puede pedir ayuda a otros si lo necesitasen, es decir, el usuario con una duda específica formularía la pregunta adecuada en el mural del fórum, y aquel usuario que supiese responderla le resolvería la duda indicándole los pasos a seguir. Es por tanto una manera extraordinaria de compartir información y conocimientos, permitiendo a todo los usuarios (de todos los niveles) avanzar en el manejo de este software tan útil para la enseñanza de las matemáticas.

Subir el material propio que se haya diseñado a la web de GeoGebra es muy sencillo. Lo primero que se debe hacer es crearse un perfil en www.geogebra.org. Una vez creado el perfil de usuario, tendremos la opción de subir a la web los applets de GeoGebra que hayamos creado previamente.

Uno de los últimos desarrollos de GeoGebra es GeoGebra Classroom (<https://www.geogebra.org/classroom>). Se trata de una plataforma virtual en la cual los maestros pueden llevar a cabo varias acciones como por ejemplo asignar tareas a sus alumnos visualizando al mismo tiempo el progreso que llevan con ellas en vivo, hacer preguntas a sus estudiantes y esperar respuesta al instante, y fomentar grupos de debates y discusión interactivos en torno a las actividades propuestas. A medida que los alumnos avancen con la tarea podemos seguir al instante el progreso de cada uno.

3.2.4. Papel de GeoGebra en la enseñanza digitalizada

Es importante que la educación sufra un proceso de innovación si se quiere que las personas aprendan a desenvolverse en la vida cotidiana (Jiménez y Jiménez, 2017). Innovar la educación consiste en hacer uso de las nuevas tecnologías para llevar a cabo el proceso de aprendizaje de diversos conceptos, los cuales son crucia-

les para el desarrollo del conocimiento y, en particular, de las matemáticas.

Hoy en día existen numerosos programas y herramientas muy útiles como apoyo para la enseñanza de las matemáticas en la escuela (Dièdrom, Descartes, Desmos, etc.) pero entre todos ellos, queremos destacar aquí el software libre y gratuito, GeoGebra. El software de geometría dinámica GeoGebra integra el trabajo de diversas áreas (geometría, análisis y álgebra) en un ambiente dinámico (Córdoba Gómez y Cardeno Espinosa, 2013) para, así, poder fomentar el desarrollo del pensamiento variacional, es decir, el pensamiento que hace énfasis en la capacidad del alumno para identificar espacios de cambio de una o más variables y las relaciones que existen entre ellas. En base a todo lo expuesto, GeoGebra debe ser considerada como una herramienta didáctica (Córdoba Gómez y Cardeno Espinosa, 2013) ya que ayuda al docente a la hora de presentar ciertas temáticas en el aula, y también debido a que proporciona al estudiante una forma distinta de representación, visualización y organización de conocimientos y procedimientos estudiados.

Por ejemplo, la imagen 3.4 muestra un ejercicio de geometría para estudiar el Teorema del Ángulo Central, el cual afirma lo siguiente: el ángulo central subtendido por dos puntos de una circunferencia es el doble que cualquier ángulo inscrito subtendido por esos dos puntos, siendo el ángulo central el que tiene de vértice el centro de la circunferencia.

Una vez mostrado el teorema a los alumnos, podemos hacer uso de GeoGebra para visualizar el teorema y que les sea más fácil de entender. Los puntos de la circunferencia se pueden desplazar por ella para que así puedan comprobar que el teorema se cumple siempre para cualquier posición de los puntos B, C y D. Como vemos en la imagen, los alumnos visualizan al mismo tiempo la ventana algebraica, donde aparece la ecuación de la circunferencia (de manera que podrían calcular el radio de la circunferencia y su centro, viendo que efectivamente coincide con las coordenadas del punto A), los puntos y los segmentos, con la ventana gráfica, que es donde queda representada la circunferencia, pudiendo así permitirles relacionar los objetos

algebraicos con su representación gráfica.

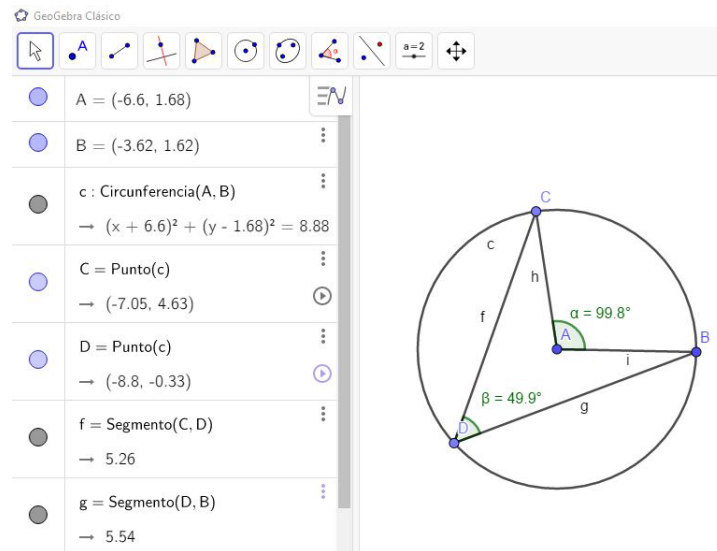


Figura 3.4: Applet de GeoGebra para visualizar el Teorema del Ángulo Central.

Además, GeoGebra puede ser de gran utilidad para llevar a cabo demostraciones de teoremas, asunto que suele ser de dificultad para muchos estudiantes. Al realizar las demostraciones apoyándonos en GeoGebra ayudamos a su comprensión al tener la posibilidad de visualizarlo. Sería conveniente que el profesor no tuviese desarrollado ya el applet con la demostración sino que fuese contruyéndola paso por paso en clase con el fin de buscar la participación de sus alumnos. La imagen [3.5](#) muestra un ejemplo de cómo poder mostrar al alumnado la demostración del Teorema de Pitágoras (la suma de los catetos al cuadrado de cualquier triángulo rectángulo es igual su hipotenusa al cuadrado). Al igual que antes, relacionan la vista algebraica con la gráfica y son capaces que cambiar las dimensiones del triángulo (siendo siempre rectángulo) observando que la suma de las áreas del polígono1 y polígono2 son siempre igual al área del polígono3.

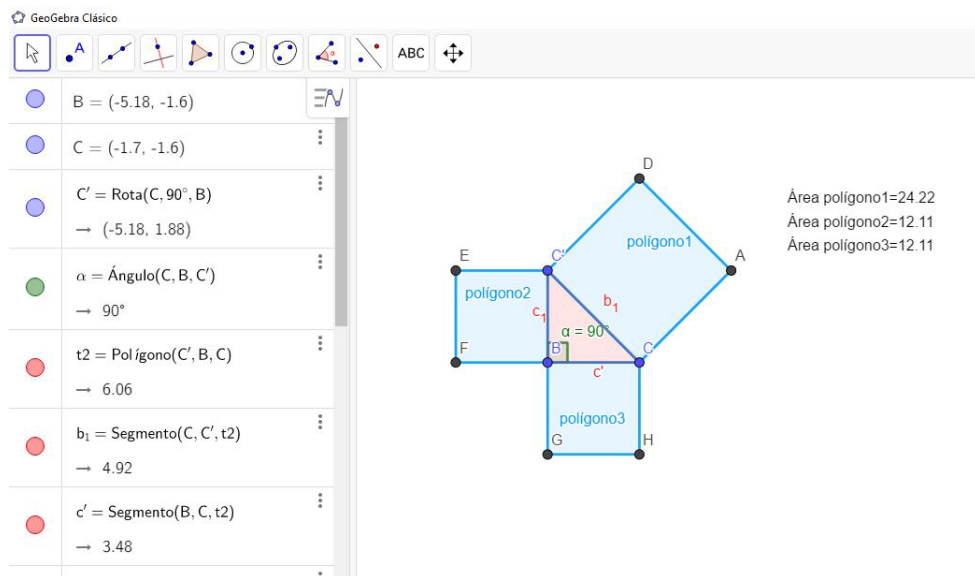


Figura 3.5: Applet de GeoGebra para demostrar el Teorema de Pitágoras.

Esto son solo dos ejemplos de los muchos que podemos construir para trabajar el tema de geometría en los institutos de educación secundaria de todo el mundo. A pesar de que GeoGebra sea mayormente concebido como un software matemático para trabajar el campo de la geometría, también resulta de gran utilidad para trabajar el análisis o la estadística y probabilidad. De hecho, aunque en un principio GeoGebra estaba pensado para la enseñanza de geometría, varios estudios como (Prodromou, 2014) han afirmado que GeoGebra es una herramienta adecuada para el proceso de aprendizaje de la estadística puesto que les facilita la comprensión de conceptos estadísticos, manejo de datos y les motiva a hacer uso de los datos para explorar modelos probabilísticos. En el menú de GeoGebra contamos con una hoja de cálculo formada por celdas (identificadas las columnas por letras y las filas por números) donde podemos introducir los datos que queramos emplear en nuestro estudio (tanto escribiéndolos nosotros como copiándolos o exportándolos). El hecho de que los alumnos aprendan a recoger datos de internet para después hacer uso de ellos en un programa como GeoGebra es una habilidad muy útil que les ayudará a saber interpretarlos mejor al convertirlos en gráficas y obtener medidas estadísticas.

Capítulo 4

Secuencias didácticas con GeoGebra

En este capítulo examinaremos cómo GeoGebra puede ser integrado en el currículo de secundaria para explicar ciertos contenidos del bloque de Geometría de los cursos tercero y cuarto de secundaria que hemos seleccionado por creer que la utilización de este software para explicar estos conceptos puede ser más beneficioso, o al menos aportar algo más, que explicándolos por el método tradicional. Vamos a desarrollar tres secuencias didácticas, dos para el curso de tercero de secundaria y una para cuarto, y de distinta duración cada una, para explicar los contenidos de mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo en la primera de ellas, la traslación y la simetría central y axial en la segunda, y, por último, vectores y ecuación de la recta en la correspondiente al curso de cuarto de secundaria. Todos estos conceptos (que han sido revisados en el BOC Extraordinario NÚM.39 del Viernes 5 de Junio de 2015 [<https://boc.cantabria.es/boces/verAnuncioAction.do?idAnuBlob=287913>]) serán explicados a partir de actividades ya desarrolladas por profesores de matemáticas con perfil en GeoGebra, y a las que se pueden acceder libremente a través de internet, combinándolas en algunos casos con actividades de desarrollo propio o del repositorio del Instituto Marqués de Santillana de Torrelavega al que nos han dado permiso para introducirlas aquí. Los applets que hemos desarrollado nosotros mismos se han empleado para la secuencia didáctica destinada a la explicación y aprendizaje de las traslaciones y simetrías del currículo de tercero de secundaria. Cabe destacar que lo ideal sería que los alumnos pudiesen disponer de ordenadores o tabletas en el aula para que ellos mismos

podieran acceder a GeoGebra y trabajar libremente modificando los objetos para que logren beneficiarse al máximo de este proceso, novedoso en muchos casos, de aprendizaje.

Para cada una de las secuencias didácticas diseñadas se adjuntará una tabla donde quede reflejado los contenidos que se abordan, los criterios de evaluación, los estándares de aprendizaje evaluables y la organización temporal.

4.1. Justificación de la elección de las secuencias

Hemos decidido llevar a cabo estas secuencias didácticas porque consideramos que con ellas podemos conseguir que los alumnos alcancen varios objetivos interesantes. En primer lugar, al abordar los conceptos de mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo, relacionamos conceptos de la asignatura de Educación Plástica, Visual y Audiovisual con la asignatura de Matemáticas, haciendo ver al alumnado que los conocimientos adquiridos en una asignatura no están aislados del resto de materias (muchas veces se pone como ejemplo que las matemáticas guardan relación con la Física y Química o la Tecnología, olvidándose de la asignatura de Plástica). Hemos creído conveniente tratar el concepto de traslación y de simetría axial y central ya que en la mayoría de los libros de texto aparecen objetos en los que se aplican traslaciones y simetrías pero son ejemplos básicos y pobres que no conducen al pleno entendimiento y visión espacial que se busca que los estudiantes alcancen. Por eso queremos que usando GeoGebra en el aula puedan modificar a su antojo las figuras a las que se aplica la traslación y la simetría e intenten ellos solos adivinar cómo sería la figura resultante. Todo esto beneficiará su abstracción espacial. Además, otro de los motivos por el cual nos hemos decidido a realizar las secuencias didácticas en base a estos contenidos es por dar algo más de importancia a las capacidades de abstracción visual ya que en la etapa de secundaria y bachillerato se trabaja principalmente de forma analítica. Según una encuesta realizada por Ángel Fernández Lázaro (Fernández-Lázaro, 2013) a profesores de matemáticas de secundaria, las principales dificultades de los alumnos al estudiar geometría son la interpretación y

modelización del espacio físico real mediante objetos geométricos ideales, el aprendizaje de las propiedades matemáticas de los objetos geométricos y el lenguaje simbólico propio de la geometría (fórmulas, expresiones, códigos y convenciones...). Es por esto por lo que creemos que es adecuado hacer uso de GeoGebra de la forma en que analizaremos posteriormente para explicar estos contenidos geométricos. Es una forma también de atender a la diversidad de los alumnos en el aula pues damos oportunidad a que aquellos alumnos que tengan capacidad espacial se sientan más cómodos trabajando.

La razón por la cual comenzamos la secuencia por aprender el concepto de mediatriz es para aprovechar lo aprendido y así poder pedir a los alumnos que calculen el eje de la simetría axial, que al final no es más que calcular la mediatriz de un segmento (aunque deberán saber qué segmento, o segmentos, es el correcto).

En cuanto a cuarto de secundaria, los contenidos del bloque de Geometría que marca el currículo son, principalmente, trigonometría y geometría analítica (vectores y rectas). En la secuencia didáctica que planteamos se da gran importancia al concepto de vector (suma y resta de vectores, componentes y módulo de un vector y combinación lineal de vectores) puesto que creemos que es importante que los estudiantes lo asimilen adecuadamente la primera vez que lo estudian más en detalle. Queremos conseguir que mediante la focalización en lo anteriormente nombrado los alumnos entiendan muy bien la ecuación de la recta.

Hemos decidido realizar estas secuencias en los cursos de tercero y cuarto de la ESO ya que ambas guardan la relación de pertenecer al bloque de Geometría y en cierta manera son contenidos que guardan relación directa (mediatriz con eje de simetría y con ecuación de la recta, bisectriz con la ecuación de la recta y vector de traslación con el concepto de vector estudiado en cuarto). En definitiva, son conceptos que trabajados de una forma novedosa, pero con la conciencia de que podría alcanzar grandes beneficios, pueden mejorar la capacidad de aprendizaje de futuros contenidos de cursos posteriores donde se sigue estudiando la geometría analítica y,

en segundo de bachillerato, en tres dimensiones y es por esto por lo que consideramos crucial que los alumnos trabajen las aptitudes de abstracción y visión espacial.

4.2. Tercero de E.S.O

4.2.1. Mediatriz y bisectriz

A continuación pasamos a analizar cómo poder llevar a cabo una secuencia didáctica para explicar la mediatriz de un segmento (y su punto medio) y la bisectriz de un ángulo, todo ello perteneciente al currículo de tercero de secundaria. Comenzamos por explicar lo primero qué es la mediatriz de un segmento para así mostrarles acto seguido el applet desarrollado por Manuel Sada (<https://www.geogebra.org/m/N5xzxPPe#material/SspDyCtr>) donde se desarrolla, en una secuencia de seis pasos, el proceso para calcular geométricamente la mediatriz de cualquier segmento (ver figura 4.1). Aunque se trata de la construcción tradicional de la mediatriz con regla y compás, en vez de su cálculo algebraicamente, es una adecuada primera aproximación para conocer el concepto de mediatriz. Pulsando en la casilla “Ver punto P sobre mediatriz” se nos dibuja un triángulo cuyos lados son \overline{AB} , \overline{BP} y \overline{PA} , para así intentar que sean los alumnos los que deduzcan qué propiedad cumplen los triángulos cuyo tercer vértice se encuentra sobre la recta de la mediatriz. Dicha propiedad es que todos esos triángulos son isósceles y para que los estudiantes confirmen su deducción, este applet permite que trasladen los puntos A, B y P como quieran para que puedan comprobar que las medidas de \overline{BP} y \overline{PA} es la misma (figura 4.2).

La Mediatriz (y el punto medio) de un segmento con regla y compás

Autor: Manuel Sada

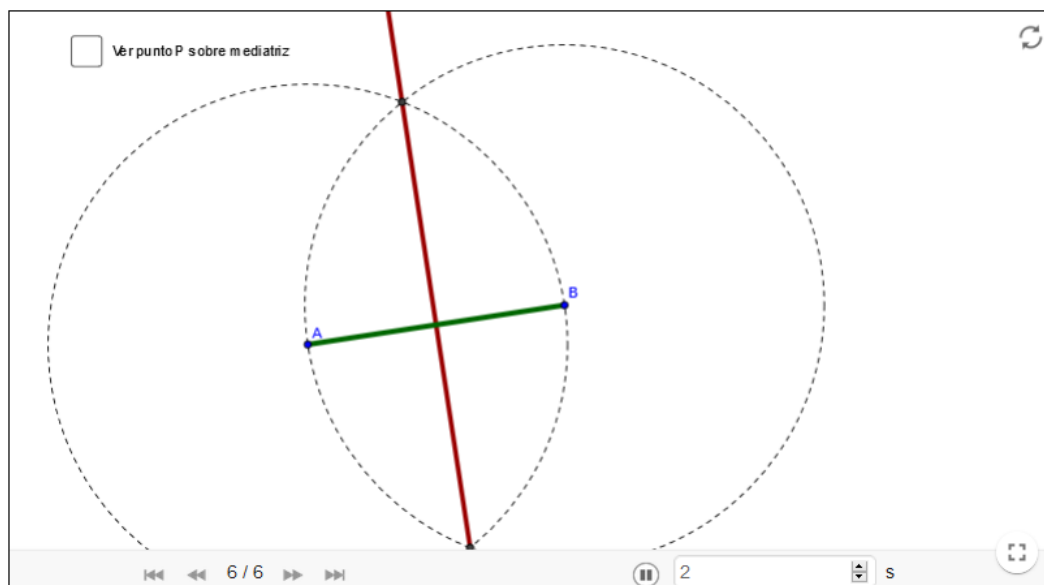


Figura 4.1: Applet de GeoGebra de Manuel Sada (Mediatriz y punto medio de un segmento).

La Mediatriz (y el punto medio) de un segmento con regla y compás

Autor: Manuel Sada

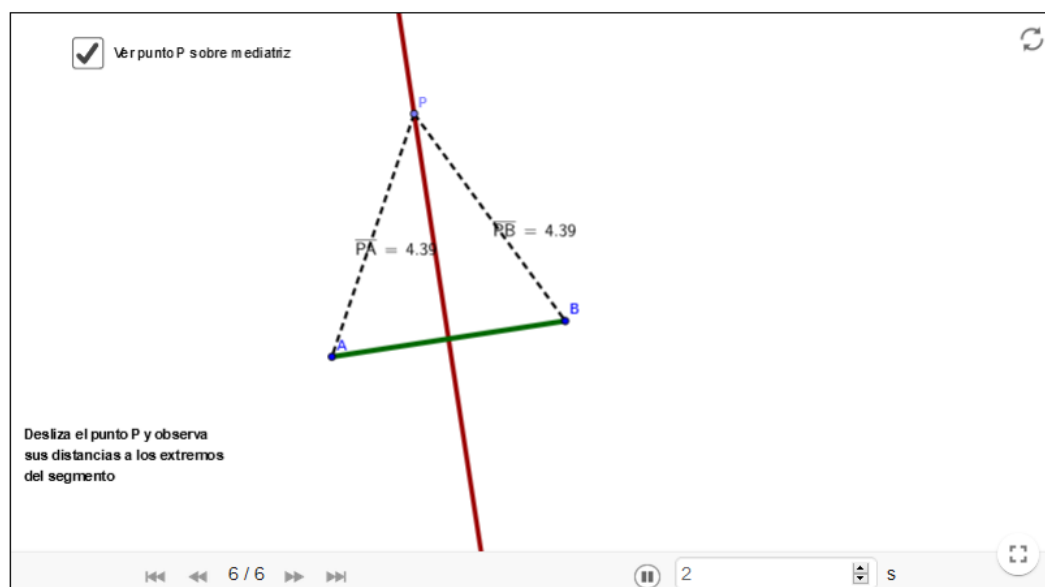


Figura 4.2: Applet de GeoGebra de Manuel Sada (Mediatriz y punto medio de un segmento).

Para el caso de la bisectriz, emplearemos el applet diseñado por Laura Ruiz (<https://>

www.geogebra.org/m/yCe9h33J#material/XuNdzqgJ). Antes de nada, al igual que con la mediatriz, es conveniente explicarles qué es la bisectriz de un ángulo, que no es más ni menos que la recta que divide el ángulo en dos ángulos iguales. En esta actividad aparece dibujada (en verde) la bisectriz de un ángulo convexo y se busca que, mediante la traslación del punto A por la bisectriz, sean los propios alumnos los que deduzcan qué propiedad cumplen aquellos puntos situados sobre la recta de la bisectriz. Para facilitarles a identificar dicha propiedad aparecen marcadas las distancias que hay desde el punto A a cada una de las rectas secantes que forman el ángulo sobre el cual se calcula la bisectriz (figura 4.3). Además, en la actividad queda marcado el valor de los ángulos $\angle PBA$ y $\angle PCA$, para poder así aprovechar a explicarles que para medir la distancia de un punto a una recta debe medirse con el segmento en perpendicular a la recta. Todas estas actividades buscan que, al ser posible que los estudiantes muevan ciertos puntos de las figuras, identifiquen ellos mismos todas las posibles relaciones y propiedades que puede haber antes de que los profesores se las descubran. De esta forma intentamos que lo interioricen con más fuerza.

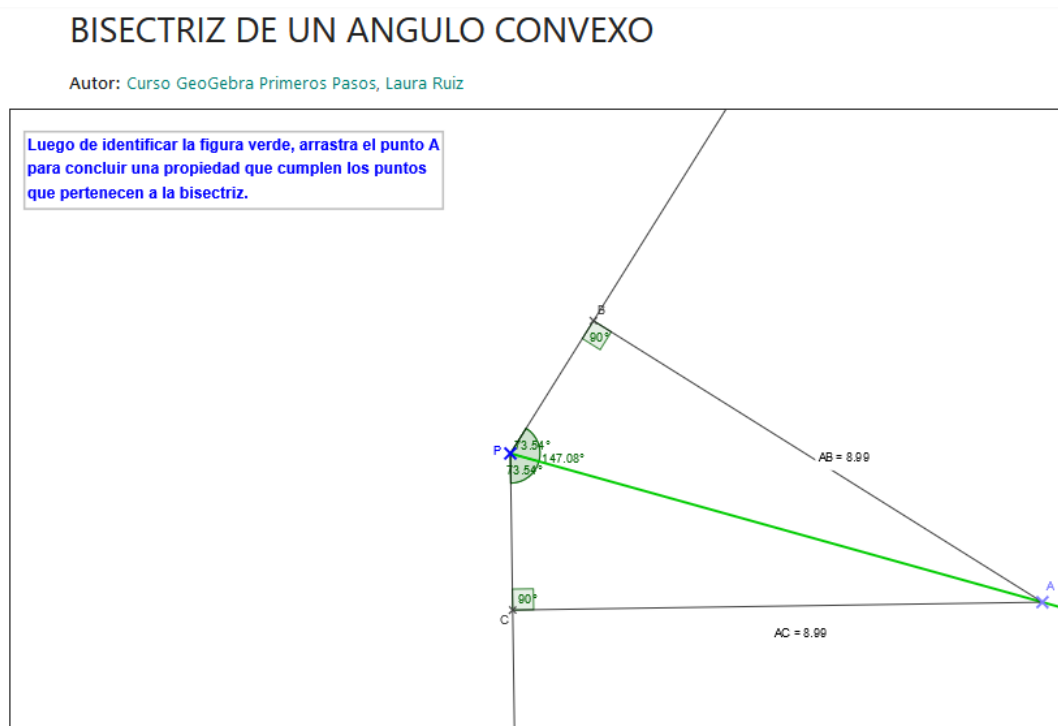


Figura 4.3: Applet de GeoGebra de Laura Ruiz (Bisectriz de un ángulo convexo).

Contenidos	Software GeoGebra. Geometría del plano. Lugar geométrico. Recta. Ángulo. Mediatriz. Bisectriz. Distancia.
Criterios de Evaluación	Reconocer y describir los elementos y propiedades de la mediatriz y bisectriz.
Estándares de aprendizaje evaluables	Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo. Define el concepto de mediatriz y bisectriz haciendo uso de la expresión "lugar geométrico". Conoce cómo debe medirse la distancia entre dos puntos, o entre un punto y una recta.
Organización temporal	Una sesión de 50 minutos.

Tabla 4.1: Tabla contenidos y objetivos correspondiente a la secuencia didáctica de la mediatriz y bisectriz.

4.2.2. Traslaciones y simetría axial y central

Como dijimos en la introducción de este capítulo, llevaremos a cabo el desarrollo de una secuencia didáctica para explicar ciertos conceptos utilizando una serie de applets GeoGebra diseñados por nosotros mismos. Los contenidos seleccionados han sido las traslaciones en el plano y la simetría axial y la central, ambas pertenecientes al currículo de la asignatura de matemáticas del curso tercero de secundaria. Hemos decidido diseñar nuestros applets GeoGebra sobre estos contenidos porque consideramos que es una manera muy visual de que los alumnos tengan su primer contacto con el concepto de vector y que de esta manera cuando pasen al siguiente curso y estudien el tema destinado a vectores en el plano no les resulte algo totalmente novedoso. Resulta ser, especialmente en el caso de las traslaciones, un modo estupendo de que vean de primeras aplicaciones de los vectores, pues a los alumnos en ocasiones les cuesta entender más los contenidos matemáticos cuando no ven su aplicación.

Una traslación de vector guía (o vector de traslación) \vec{u} transforma un punto P del plano en otro P' . Para completar el entendimiento de lo que es una traslación y el papel que juega ese vector guía, hemos ideado el siguiente applet (<https://www.geogebra.org/m/knrnrezu>) (figura 4.4), en el cual se ha programado mediante la herramienta de casilla de control para que el alumnado vea paso a paso el resultado de aplicar la traslación de vector guía \vec{u} (en verde) al triángulo que aparece. La última casilla sirve a modo de comprobación de que cada uno de los puntos del triángulo ha sido trasladado por el mismo vector de traslación.

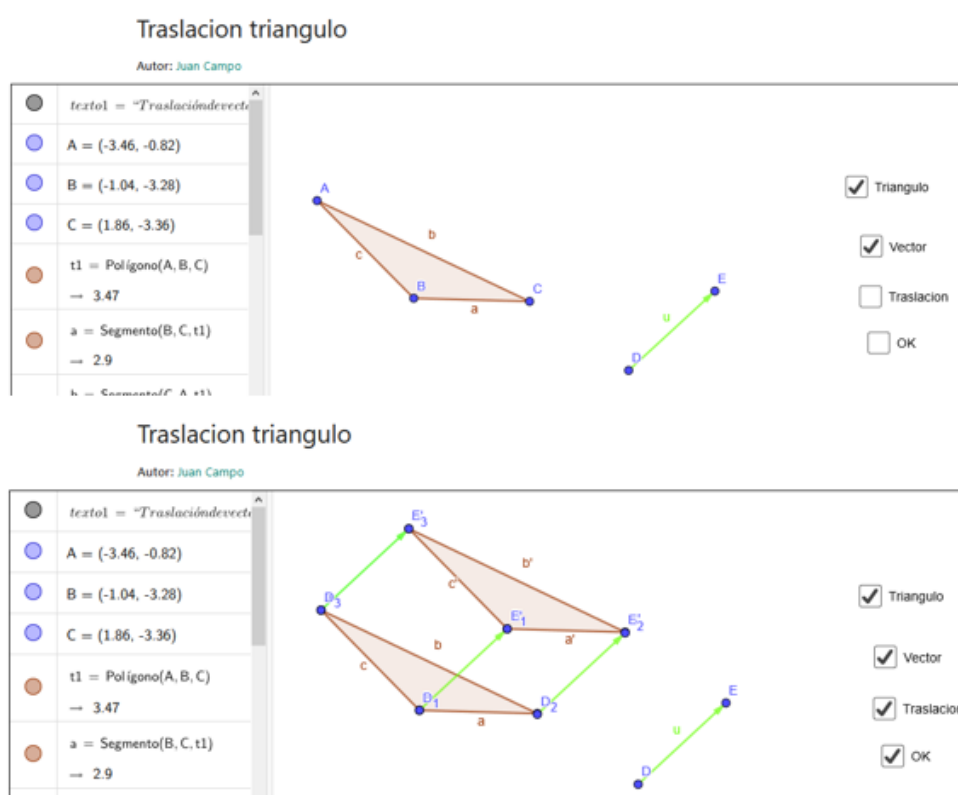


Figura 4.4: Applet de GeoGebra de Juan Campo (Traslación de un triángulo).

A continuación, una vez explicado el concepto de traslación, se explican las traslaciones sucesivas. La aplicación sucesiva de dos traslaciones de vectores guía \vec{u} y \vec{v} es otra traslación que tiene como vector guía $\vec{u} + \vec{v}$. Para abordar este contenido también hemos diseñado una actividad con GeoGebra donde los estudiantes podrán comprobar ellos solos que la traslación que tiene como vector guía la suma de los otros dos, es exactamente la misma que si aplicásemos las dos traslaciones

sucesivamente. Aunque en tercero de secundaria no se llegue a explicar cómo se realiza la suma de vectores, tanto geoméricamente como analíticamente, no es problema puesto que GeoGebra nos puede calcular directamente dicha suma. Al igual que antes, la actividad (<https://www.geogebra.org/m/gvtg9k72>) está programada con casillas de control a partir de las cuales los alumnos pueden ir calculando paso a paso la traslación del cuadrilátero que tiene como vector guía a $\vec{u} + \vec{v}$, cuyo resultado es el vector \vec{w} (figura 4.5) y también las dos traslaciones sucesivas de vectores de traslación \vec{u} y \vec{v} , y de esta forma comprobar por sí solos que efectivamente ambas coinciden (figura 4.6). Además, lo bueno de estas actividades es que también permite a los estudiantes modificar los vectores guía, para que puedan visualizar el resultado de cada traslación dependiendo de los vectores que se tengan, y modificar la forma del cuerpo geométrico que se quiere trasladar, evitando así que los alumnos puedan asociar las traslaciones con los comunes ejemplos que suele tomarse en las explicaciones.

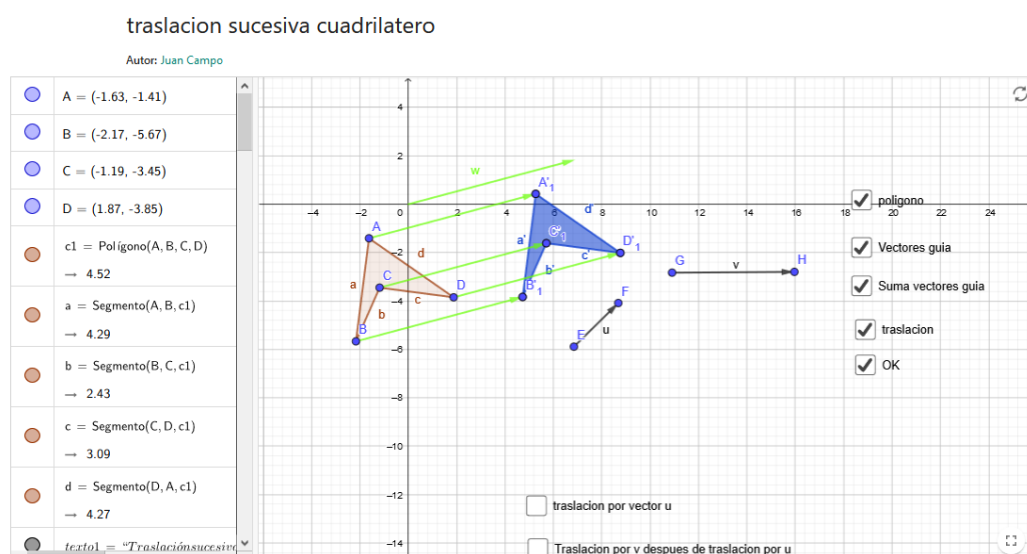


Figura 4.5: Applet de GeoGebra de Juan Campo (Traslación sucesiva de un cuadrilátero).

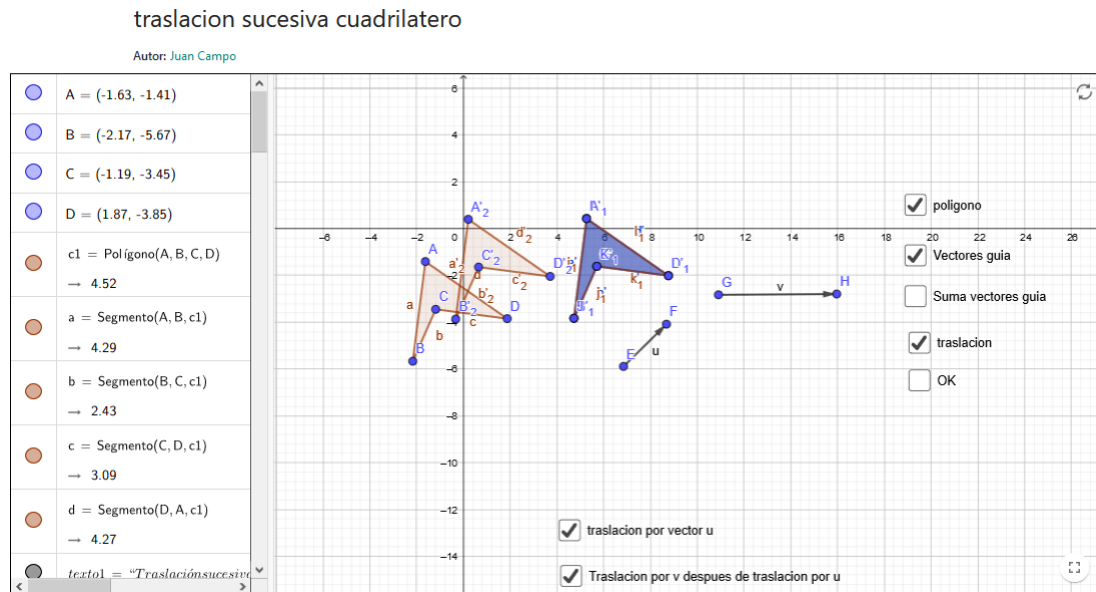


Figura 4.6: Applet de GeoGebra de Juan Campo (Traslación sucesiva de un cuadrilatero).

Para el caso de las simetrías, tanto la axial como la central, hemos diseñado actividades para tratar cada una de ellas. Las primeras consisten simplemente en realizar la simetría de una serie de objetos para que reconozcan a qué tipo de simetría corresponde cada una y a que tengan una noción visual de cómo se lleva a cabo dicha simetría (figura 4.7 [<https://www.geogebra.org/m/tqywmvuh>] y figura 4.8 [<https://www.geogebra.org/m/c3vhtkqk>]). Posteriormente, se muestra una actividad más para cada tipo donde aprenderán los conceptos de eje de simetría (en la simetría axial) y centro de simetría (en la simetría central) y a cómo hallar cada uno de ellos (figura 4.9 [<https://www.geogebra.org/m/zqzk8ujr>] y figura 4.10 [<https://www.geogebra.org/m/s8mpv9af>]).

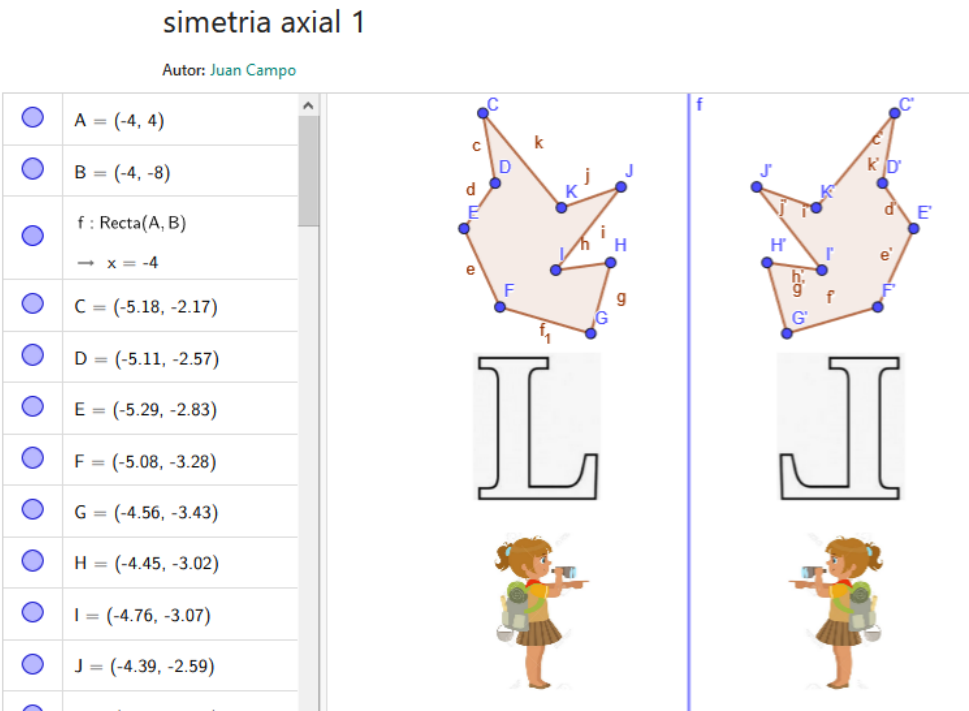


Figura 4.7: Applet de GeoGebra de Juan Campo (Simetría axial).

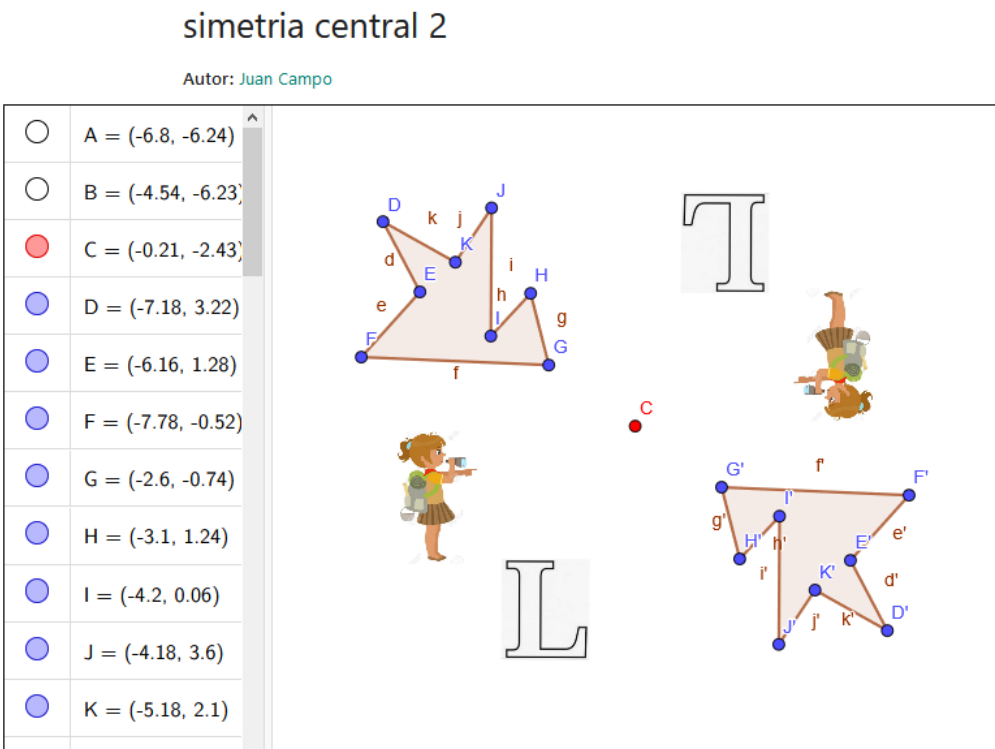


Figura 4.8: Applet de GeoGebra de Juan Campo (Simetría central).

Se dice que dos puntos P y P' son simétricos respecto de un eje (recta) cuando dicho

eje es la mediatriz del segmento que une P y P' . Esta simetría es la denominada simetría axial. La figura 4.9 consiste en, dado un polígono y su simétrico, calcular cuál es el eje de esa simetría. Para ello está representado mediante casillas de control cada uno de los pasos que hay que dar para llegar a obtenerlo. Al igual que con el resto de actividades diseñadas, se permite que los alumnos modifiquen el polígono sobre el cual se calcula su figura simétrica. Una vez hecho este pequeño ejercicio la siguiente actividad que proponemos a los alumnos es que comprueben que, cogiendo otro punto cualquiera y su simétrico, se obtiene el mismo eje de simetría, como es de esperar. Como todavía en tercero de secundaria no se enseña las ecuaciones de las rectas, GeoGebra resulta ser una perfecta herramienta para trabajar calculando este tipo de ejercicios donde al final se calculan rectas, aunque solo sea de manera geométrica. Esto sabemos que deben saber hacerlo ya que esta secuencia didáctica comenzó con la explicación de la mediatriz de un segmento y el cálculo del eje de simetría al final no es más que calcular la mediatriz del segmento que une un punto y su simétrico. Con este pequeño ejercicio buscamos que los alumnos sean conscientes de las relaciones entre los conceptos aprendidos. No solo se les pide calcular el eje de simetría con la herramienta de GeoGebra, sino que deberán hallarlo también de la forma que vieron en el applet de la figura 4.1.

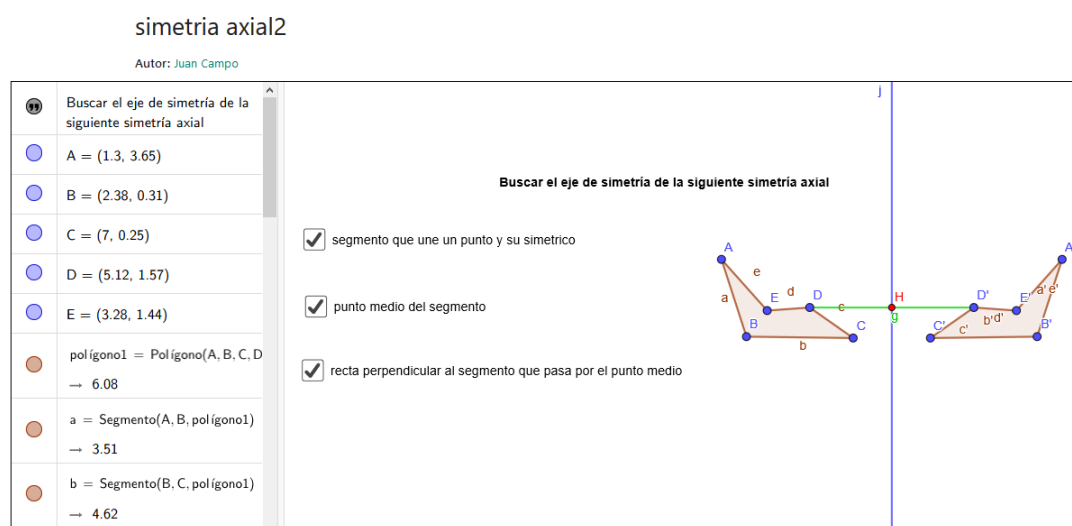


Figura 4.9: Applet de GeoGebra de Juan Campo (Simetría axial).

En el otro caso, se dice que dos puntos P y P' son simétricos respecto de un punto O cuando O es el punto medio del segmento PP' . A el punto O se le llama cen-

tro de simetría. La última actividad que hemos desarrollado para dar por finalizada esta secuencia didáctica consiste en que los alumnos y alumnas, después de haber realizado la actividad anterior y de haber visto los distintos ejemplos de simetrías centrales, sepan por si solos hallar el centro de simetría de la simetría que aparece en la figura 4.10. Para ello, podrán mover libremente el polígono sobre el cual se aplica la simetría para que así vean cómo cambia la figura simétrica y les ayude, por tanto, a averiguar cómo hallar el centro de la simetría. Está claro que por tanto la definición formal antes expuesta de simetría central no debería ser dada hasta que los alumnos hayan invertido algo de tiempo en intentar resolver el ejercicio. Con este tipo de ejercicio buscamos que, al tener que ser el alumno el que descubra que propiedad se cumple respecto al centro de la simetría, asimilen mucho mejor el contenido evitando así que memoricen la definición y que la olviden en un futuro.

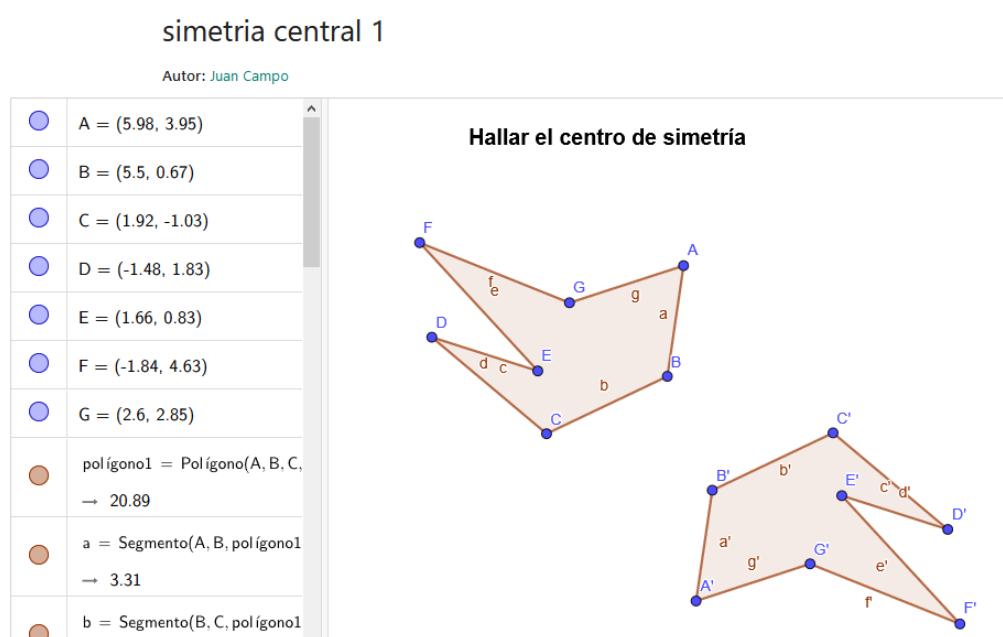


Figura 4.10: Applet de GeoGebra de Juan Campo (Simetría central).

Tabla 4.2: Tabla contenidos y objetivos correspondiente a la secuencia didáctica de traslación y simetría axial y central.

Contenidos	Software GeoGebra. Traslación en el plano. Vector de traslación. Simetría axial en el plano. Simetría central en el plano. Centro y eje de una simetría.
Criterios de Evaluación	Reconocer y describir las traslaciones y las simetrías axiales y centrales. Adquiere una primera noción del concepto de vector.
Estándares de aprendizaje evaluables	Reconoce la traslación de un vector suma como la composición de dos traslaciones. Calcula (gráficamente) el vector de una traslación y también el eje y el centro de una simetría axial y central, respectivamente.
Organización temporal	Dos sesiones de 50 minutos cada una.

4.3. Cuarto de E.S.O

4.3.1. Vectores y ecuación de la recta

Para llevar a cabo la secuencia didáctica correspondiente a la explicación del tema de vectores en el plano y la ecuación de la recta, perteneciente al currículo de cuarto de secundaria, hemos decidido apoyarnos en las actividades GeoGebra creadas por LauraMates (<https://www.geogebra.org/m/x662B58Y#material/KWK6yM2G>), para explicar qué es un vector y cómo se calcula a partir de dos puntos, qué es el módulo de un vector y cómo se calcula, cuándo dos vectores son linealmente independientes y, por último, cuáles son las componentes de un vector. También he empleado algunos applets que hemos visto que utilizaban en el instituto Marqués de Santillana de Torrelavega (<http://portaleducativo.educantabria.es/web/ies-marques-de-santillana>) para explicar geométricamente la suma y resta de vectores, y para la explicación y deducción de la ecuación vectorial de la recta. Para poder poner los applets que usan en sus clases he pedido permiso al centro

previamente.

Normalmente, cuando se introduce el tema de vectores en la etapa de la educación secundaria, se comienza explicando que representa un vector y cuál es su dirección, sentido y módulo. Por ello, la primera de los aplets diseñados por LauraMates (figura 4.11) resulta ser perfecta para explicar todos estos conceptos. En ella podemos ver cómo a partir de dos puntos dibujados en el plano (que podemos cambiar de posición libremente) se calcula el vector que tiene origen en A y extremo en B. También queda representada por puntos suspensivos la recta sobre la cual se sitúa el vector, lo que ayuda a que alumnos entiendan bien la diferencia entre dirección y sentido de un vector. En cuanto al módulo del vector, la actividad nos indica cómo se calcula dicho valor, pero antes de que sea el profesor quien les diga a los estudiantes qué es lo que representa, el que puedan ellos mismos mover los puntos sobre los cuales se calcula el vector para que vean así que, cuanta más longitud tenga el vector, mayor es su módulo, debe hacerles deducir que probablemente lo que indique es precisamente el valor de la longitud de dicho vector. Una vez deducido esto, se pasa a explicarles el origen de la fórmula que calcula el módulo de un vector. Para ello, puede ayudarles el que el profesor coloque el origen del vector sobre el origen de coordenadas para que de esta forma identifiquen con más claridad el valor de los lados del triángulo rectángulo que se forma y, de esta forma, puedan relacionar la fórmula con el teorema de Pitágoras, ya que el valor del módulo del vector no es más que el valor de la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo que se forma (figura 4.12).

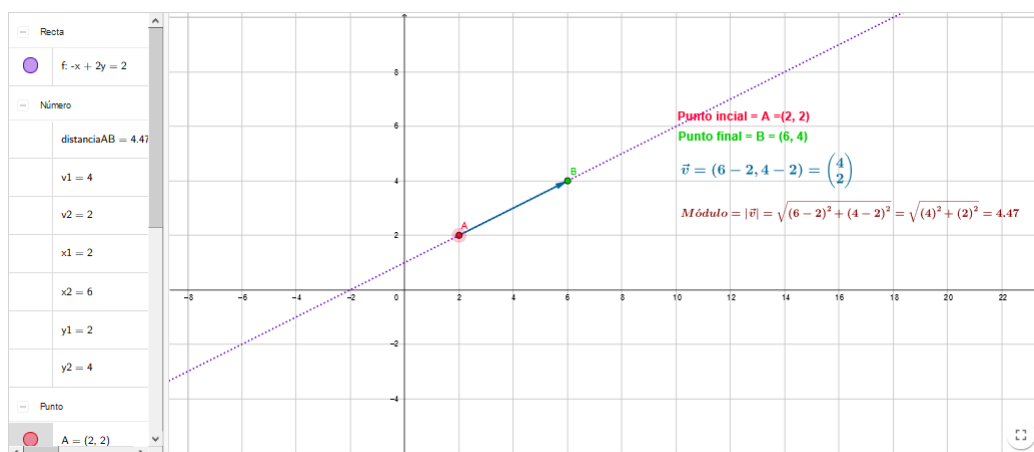


Figura 4.11: Applet de GeoGebra de LauraMates (Vector y módulo).

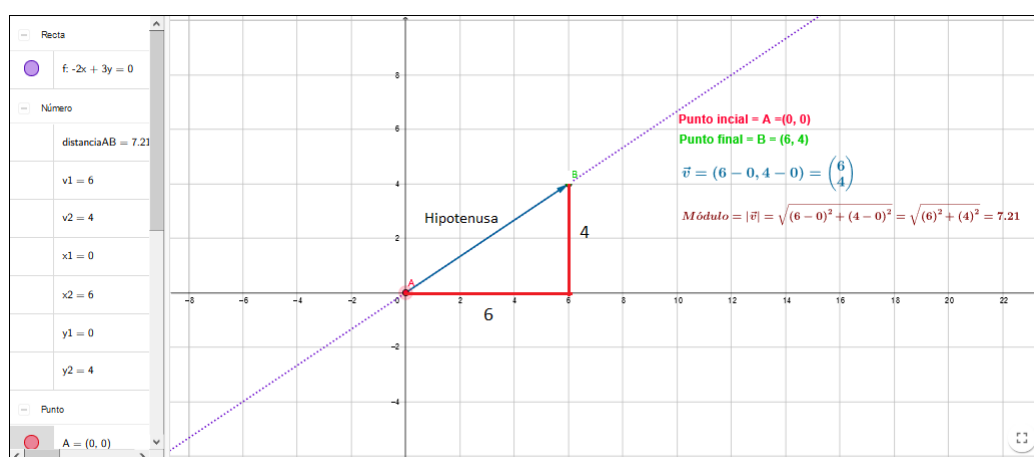


Figura 4.12: Applet de GeoGebra de LauraMates (Vector y módulo) modificado.

Seguimos la secuencia explicando ahora la suma y resta de vectores. Como primera explicación, podemos explicárselo analíticamente, es decir, dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ se define la suma de esos dos vectores como $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$. Del mismo modo, la resta se define como $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$. Tras la realización de unos ejemplos de sumas y resta de vectores, sería muy interesante y adecuado mostrarles la suma y resta de vectores pero esta vez geoméricamente. Para ello, voy a hacer uso del applet de GeoGebra que mi tutor de prácticas del máster, Raúl Lucio, emplea en su instituto, El Marqués de Santillana, cuando explica a sus alumnos de cuarto de secundaria cómo se calcula la suma y resta de vectores geoméricamente. Como se puede observar, dados dos vectores en el plano, se tiene dos deslizadores que permiten visualizar la suma de dos maneras

distintas; una tal y como se ve en la imagen 4.13 (el vector suma de los vectores \vec{u} y \vec{v} , es el vector que tiene mismo origen que el vector \vec{u} y extremo el mismo que el del vector \vec{v} una vez este ya ha sido trasladado como aparece en la imagen), y el otro método sería aplicando la conocida regla del paralelogramo. Del mismo modo se explica la resta de vectores (imagen 4.14). Eso sí, antes de mostrarles la solución de cómo se realiza geoméricamente la resta de vectores, se busca que sean los propios alumnos los que lleguen a deducirlo tras haber visto cómo se calcula la suma, ya que si queremos realizar $\vec{u} - \vec{v}$ no tenemos más que considerar la siguiente suma $\vec{u} + (-\vec{v})$, donde deberían saber ya cómo se representa el vector $-\vec{v}$.

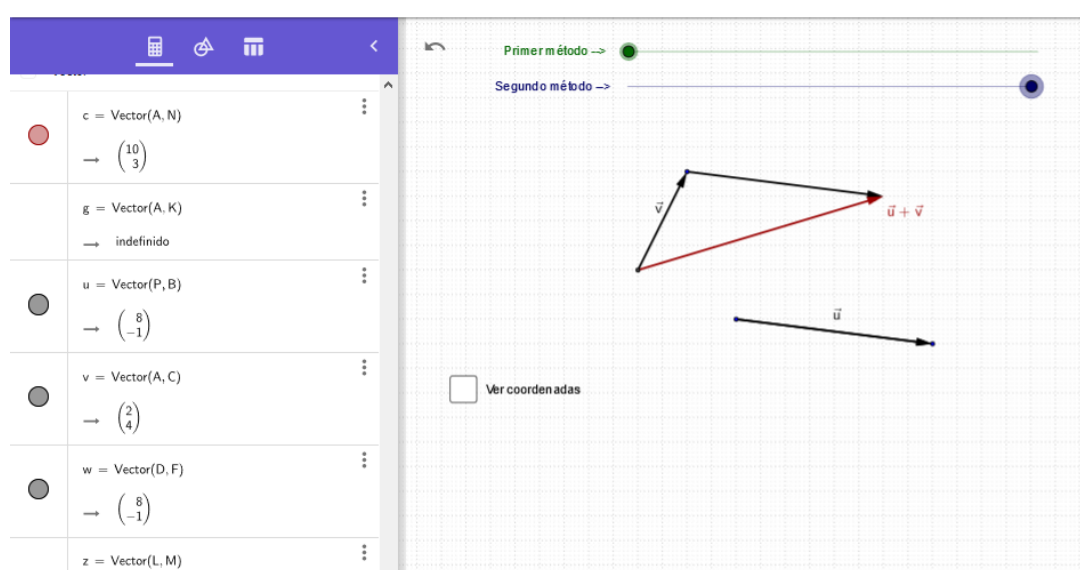


Figura 4.13: Applet de suma de vectores utilizado en el IES Marqués de Santillana.

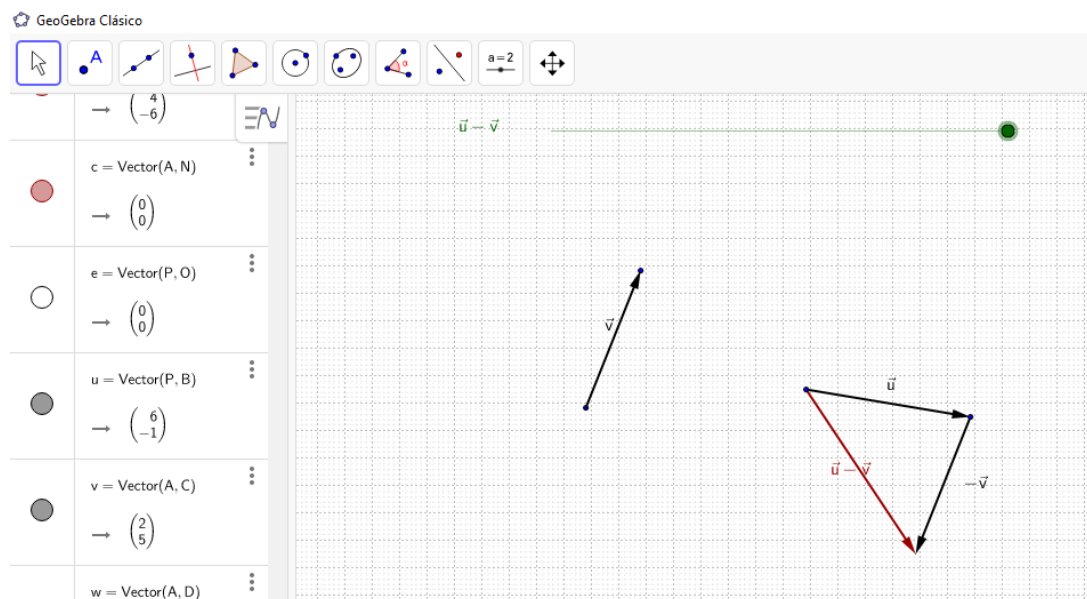


Figura 4.14: Applet de suma de vectores utilizado en el IES Marqués de Santillana.

Una vez visto la suma y resta de vectores podemos continuar la secuencia didáctica con la explicación de la combinación lineal de vectores. Antes de nada, definiríamos que dos vectores en el plano son linealmente independientes si tienen distinta dirección y que, por tanto, se dice que son linealmente dependientes cuando sí tienen la misma dirección. De esta forma, pasamos a explicar que todo vector \vec{w} se puede expresar como combinación lineal de dos vectores linealmente independientes \vec{u} y \vec{v} . Esto es, que \vec{w} se pueda expresar como $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$, siendo a y b dos números reales. En el mes de diciembre del año pasado (2020) surgió la oportunidad de ejercer como profesor de matemáticas tanto en secundaria como en bachillerato debido a la excepcional situación provocada por la Covid-19. Durante esta experiencia coincidió que tuviésemos que explicar el tema de vectores en el plano en el curso de cuarto de secundaria y pudimos comprobar que el concepto de combinación lineal de vectores resultaba ser algo más costoso de entender para gran parte de la clase. Por ello, la siguiente actividad (figura 4.15) está perfectamente diseñada para ayudarles a la comprensión de como cualquier otro vector \vec{w} puede ser expresado mediante la combinación lineal de los vectores linealmente independientes \vec{u} y \vec{v} . En el applet nos aparecen dos deslizadores que sirven para dar valores a a y b y así permitir que los estudiantes varíen dichos valores para que comprueben por si solos

como se puede obtener cualquier vector \vec{w} a través de la suma de los otros dos.

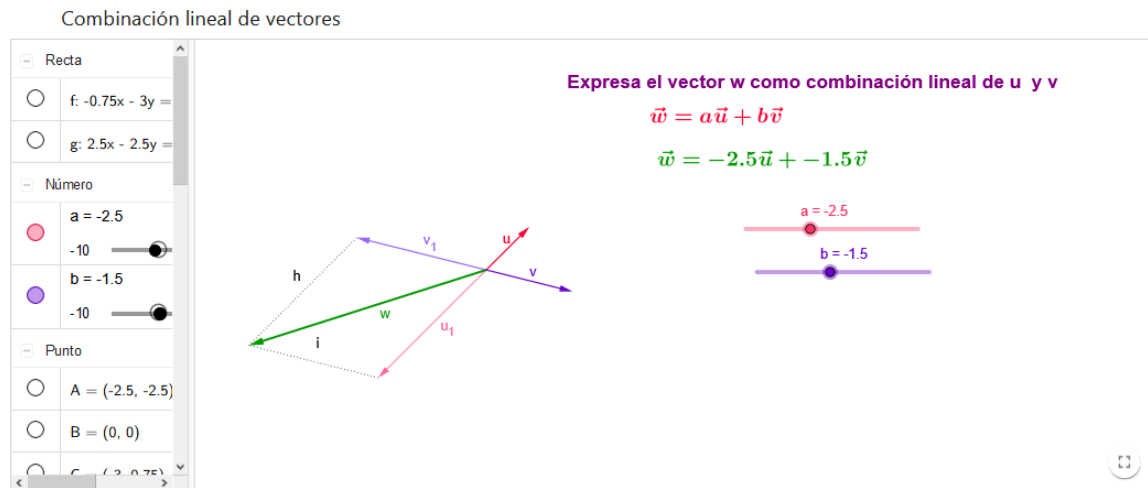


Figura 4.15: Applet de GeoGebra de LauraMates (Combinación lineal de vectores).

Para dar por terminada la parte exclusiva de vectores de esta unidad didáctica, hemos decidido utilizar la tercera de las actividades de LauraMates para expresar el concepto de las componentes de un vector, concepto que sigue a la explicación previa de la combinación de vectores. Un vector se puede expresar siempre como combinación lineal de dos vectores unitarios, es decir, que su módulo es igual a uno, y que son perpendiculares entre sí. Esta explicación es posible ya que previamente se les ha explicado la combinación lineal de vectores y por tanto entienden que es lo que significa que un vector pueda ser expresado como combinación lineal de otros dos. Para que los alumnos entiendan cuáles son las componentes de un vector y cómo se calculan, resulta especialmente adecuado el ejercicio de la figura [4.16](#), donde se nos muestra una serie de casillas que a medida que las marcamos, se nos muestra paso a paso el procedimiento para calcular dichas componentes del vector.

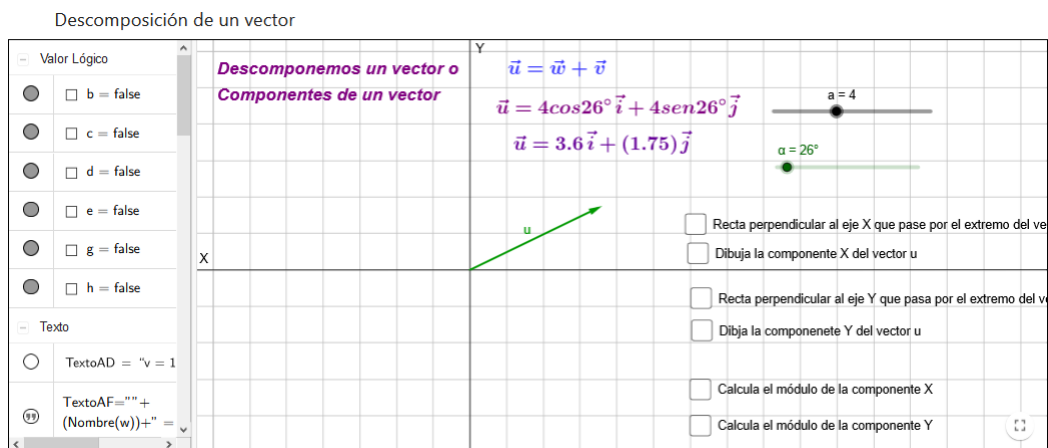


Figura 4.16: Applet de GeoGebra de LauraMates (Descomposición de un vector).

Como vemos, tras haber marcado todas las casillas, se nos aparecen representadas las componentes del vector y además nos permite modificar el vector \vec{u} para ver cuáles son las componentes en cada caso, tal y como nos muestra la figura 4.17. En la imagen nos aparecen calculados los valores de a y b que acompañan a \vec{i} y \vec{j} que es como se representa a los vectores unitarios perpendiculares a partir de los cuales podemos representar cualquier vector \vec{u} como combinación lineal con los valores calculados de a y b . Al permitir a los estudiantes repetir el proceso paso a paso cuántas veces necesiten les ayuda a asimilar cómo se lleva a cabo el proceso de descomposición de un vector.

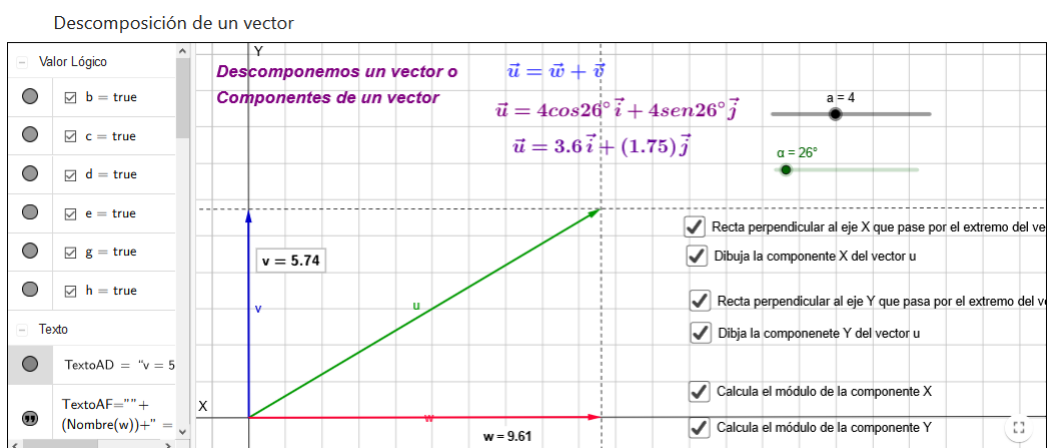


Figura 4.17: Applet de GeoGebra de LauraMates (Descomposición de un vector).

Una vez finalizado las sesiones dedicadas a los vectores, pasamos a las ecuaciones de las rectas. Esta parte dedicada a la ecuación de la recta, en particular a la ecua-

ción vectorial que es sobre la que está pensada la secuencia didáctica, no va seguido totalmente de las anteriores sesiones donde se explicaban lo relativo a los vectores ya que una vez explicado los conceptos, es normal que se guardan por lo menos dos sesiones de clase para trabajar los contenidos mediante ejercicios variados (que lo ideal sería, que una vez el profesor ha dedicado tiempo a explicar todo esto con el programa GeoGebra, anime a sus estudiantes a que empleen ellos también el programa para al menos comprobar que los ejercicios que resuelvan en casa están bien hechos).

Como he dicho, la última sesión de esta secuencia didáctica perteneciente al bloque de Geometría de cuarto de secundaria, está diseñada para que alumnos entiendan y comprendan la ecuación vectorial de una recta, en definitiva, el porqué de que se pueda expresar y se exprese de esa manera. Recordemos que la ecuación vectorial de una recta r que pasa por un punto $A = (a_1, a_2)$ y tiene como vector director a $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es el conjunto de puntos $X(x, y)$ que cumplen $r : (x, y) = (a_1, a_2) + t(u_1, u_2)$, con $t \in \mathbb{R}$. Es probable, y de hecho pude cerciorarlo cuando estuve dando clases de este tema y también junto a mi tutor de prácticas por su experiencia personal, que los alumnos no lleguen a entender, o al menos un gran número de ellos, del todo bien qué es lo que representa esa ecuación, que en palabras coloquiales lo que viene a representar es la recta como una suma de vectores. No todo el mundo tiene la misma capacidad de abstracción y necesitan ver representada esta idea y con GeoGebra podemos hacer esto a la perfección, tal y como vemos en la imagen [4.18](#). En este applet, el punto A que hemos definido en la ecuación se corresponde con el punto P del applet y el vector \vec{u} con el \vec{d} . Uno de los aspectos a tener en cuenta a la hora de explicar esto a los estudiantes es que tienen que tener claro que no se puede sumar un punto y un vector, y que en realidad, lo que nos indica la ecuación vectorial de la recta es que se está sumando el vector de origen el punto origen de coordenadas y extremo el punto A con el vector \vec{u} multiplicado por un parámetro t que lo único que hace es variar el módulo del vector \vec{u} . Teniendo todo esto en mente, el siguiente applet muestra de forma muy clara y sencilla como realizando la suma (geométricamente como se vio antes) de esos dos vectores, el extremo del vector

suma resultante pertenece a la recta y de esta forma, variando el parámetro t , obtenemos todos los puntos que pertenecen a la recta y en consecuencia lo que se tiene es la recta que pasa por A y tiene vector director a \vec{u} , ya que una recta está formada por infinitos puntos. Desde que pude ver este applet en el instituto en mi periodo de prácticas allí, no dudé en ningún momento en plasmarlo aquí ya que considero que es una herramienta increíblemente útil para entender por qué la ecuación vectorial de la recta viene dada así. Cuando se es estudiante hay ocasiones en las que no te paras mucho a pensar el porqué de ciertas cosas, sino que simplemente te las aprendes porque hay que hacerlo sin tomarte un instante en intentar deducirlo y comprenderlo al 100 %. Si conseguimos apoyarnos en esta actividad cuando explicamos la ecuación de la recta, la visión de la situación que tendrán los alumnos cambiara positivamente para afrontar el resto de contenidos. Con este applet doy por finalizado la secuencia didáctica para el tema de geometría analítica en el plano (vectores y rectas) perteneciente al currículo de cuarto de educación secundaria.

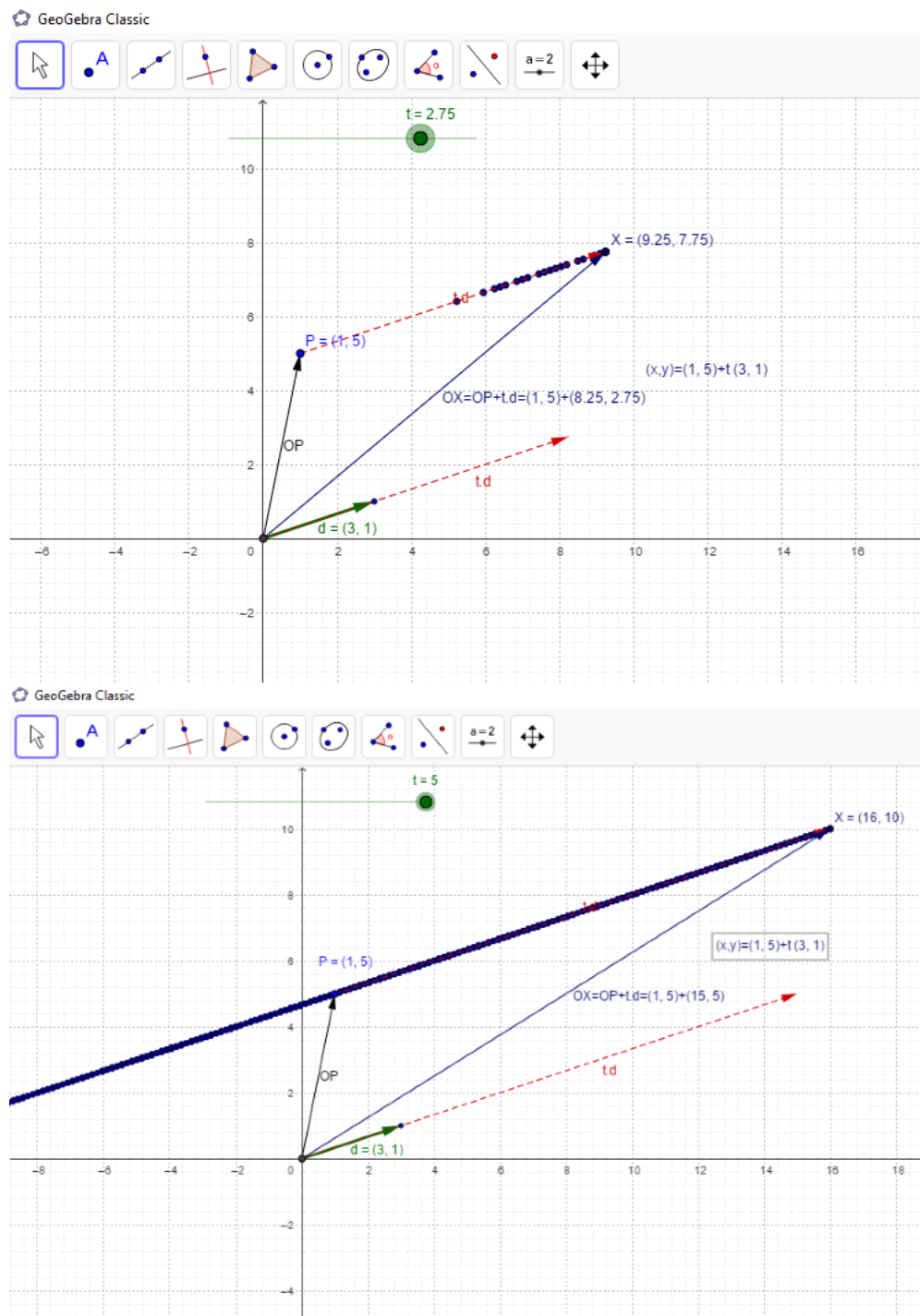


Figura 4.18: Applet ecuación vectorial utilizado en el IES Marqués de Santillana).

Tabla 4.3: Tabla contenidos y objetivos correspondiente a la secuencia didáctica de vectores y ecuación de la recta.

Contenidos	Software GeoGebra. Ejes cartesianos. Coordenadas. Vectores. Representación de un vector. Módulo de un vector. Operaciones con vectores (gráfica y analíticamente). Independencia lineal. Ecuación de la recta.
Criterios de Evaluación	Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos de la geometría analítica vistos en la secuencia didáctica. Representar, describir y analizar vectores y rectas.
Estándares de aprendizaje evaluables	Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo del vector. Relaciona el Teorema de Pitágoras con el cálculo del módulo de un vector. Relaciona la ecuación vectorial de la recta con la representación gráfica de infinitas sumas de vectores.
Organización temporal	Dos sesiones de 50 minutos cada una.

Capítulo 5

Conclusiones

Hoy en día, gracias a los avances tecnológicos en todos los aspectos, en especial, en el ámbito de la enseñanza, es posible tratar la asignatura de matemáticas en las aulas mediante el empleo de programas informáticos que permitan relacionar los conceptos teóricos con la práctica, permitiendo al alumnado estudiar los contenidos de una manera más motivadora y enriquecedora.

En este trabajo nos hemos centrado en el software de geometría dinámica GeoGebra puesto que constituye una herramienta eficaz para el estudio de conceptos matemáticos, especialmente aquellos relacionados con el bloque de la geometría al tratarse de aspectos que requieran hacer uso de la visión espacial del estudiante, aspecto que no siempre es plenamente desarrollado. Cabe destacar el interés, la satisfacción y el agrado que se percibe en el alumnado con el tipo de metodología presentado, incidiendo de esta forma en su motivación, aprendizaje y resultados académicos.

Los alumnos suelen encontrar dificultades a la hora de estudiar los contenidos del bloque de geometría puesto que les falta capacidad visual para entender, comprender y relacionar conceptos. Muchos de estos problemas pasan por no fomentar la visualización de dichos conceptos, sino que principalmente se explican de forma teórica con una escasa y empobrecida colección de ejemplos. Es por esto por lo que el empleo del programa informático GeoGebra permite al alumno visualizar y construir fácilmente objetos matemáticos sobre los que estén estudiando en el aula, así como

manipular ejemplos que el propio profesor les proporcione, fomentando así que el estudiante experimente y reflexione sobre los contenidos aprendidos y estableciendo relaciones y conexiones entre unos y otros. Esta metodología presentada se trata de un aprendizaje activo y por descubrimiento puesto que a partir de conocimientos previos del alumno se originan aprendizajes significativos, aumentando la capacidad de razonamiento de los alumnos al tener que activarse para realizar las actividades planteadas.

Es por tanto una herramienta que debería ser tenida en cuenta a la hora de diseñar las secuencias didácticas. Pero para que todo esto tenga éxito, es crucial que nosotros, los profesores, nos esforcemos por justificar, relacionar y exponer los contenidos matemáticos que queramos enseñar haciendo uso tanto de GeoGebra como del método tradicional, atendiendo así además a la diversidad del alumnado.

Para terminar, como resultado de haber realizado este Trabajo de Fin de Máster se ha presentado una comunicación en el XXIX Congreso Internacional INFAD “Confianza en tiempos de crisis” en la sesión de “Tecnologías y comunicación educativa en tiempos de crisis”. Además, el trabajo ha sido aceptado para ser publicado en La Revista INFAD de Psicología “International Journal of Developmental and Educational Psychology”.

Referencias

- Belloch, C. (2012). Las tecnologías de la información y comunicación en el aprendizaje. *Departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación. Universidad de Valencia*.
- Córdoba Gómez, F. J., y Cardeño Espinosa, J. (2013). Desarrollo y uso didáctico de geogebra. *Textos Académicos*.
- Fernández-Lázaro, Á. (2013). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas en eso y bachillerato. análisis de un caso práctico*. (Tesis de Master no publicada).
- Ghavifekr, S., y Rosdy, W. A. W. (2015). Teaching and learning with technology: Effectiveness of ict integration in schools. *International Journal of Research in Education and Science*, 1(2), 175–191.
- González-López, M. J. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica. *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Universidad de Granada*, 277–290.
- Hernandez, R. M. (2017). Impacto de las tic en la educación: Retos y perspectivas. *Propósitos y representaciones*, 5(1), 325–347.
- Hohenwarter, M., y Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ict: towards an international geogebra institute. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 49–54.
- Jiménez, J., y Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, 4, 1-17.
- Machekhina, O. N. (2017). Digitalization of education as a trend of its modernization and reforming. *Revista Espacios*, 38(40).
- Meraviglia, A. (2020, Mayo). La incidencia del teletrabajo en España pasa del 5 % al 34 % durante la pandemia. *El PAIS*. Descargado de https://cincodias.elpais.com/cincodias/2020/05/05/economia/1588694657_002760.html

- Mora, J. A. (2017). Geometría dinámica en secundaria. *XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, Granada.
- Prodromou, T. (2014). Geogebra in teaching and learning introductory statistics. *Electronic Journal of Mathematics & Technology*, 8(5), 363–376.
- ¿Qué es GeoGebra? (s.f.). <https://www.geogebra.org/about>. (Accessed: 2020-11-15)
- Schleicher, A. (2020). The impact of covid-19 on education insights from education at a glance 2020. Retrieved from oecd. org website: <https://www.oecd.org/education/the-impact-of-covid-19-on-education-insights-education-at-a-glance-2020.pdf>.